I Polinomi, questi sconosciuti

Primi elementi di algebra

L. Seta[1]

[1]Dip. Giurisprudenza - Economia e Commercio

Palermo, 2013

Argomenti

- Un monomio è una 'combinazione' di numeri e lettere del tipo:

$$2ab^2;\ 3xy;\ \sqrt{3}ay$$

- Quando parliamo di 'combinazione' si sottintende che i numeri e le lettere sono tra di loro **moltiplicati**.
- Ad esempio, con $2a$ s'intende 2 volte a, cioè $a + a$. Quindi

$$a + a = 2a$$

- La parte numerica di un monomio è detta **coefficiente**. Ad esempio in $2ab^2$ il coefficiente è 2; in $\sqrt{3}ax$ il coefficiente è $\sqrt{3}$.
- L'insieme dei fattori letterali è detta **parte letterale**, quindi ab^2 è la parte letterale di $2ab^2$.
- Ogni lettera può apparire elevata ad un esponente, come ad esempio la lettera b in ab^2. Chiaramente b^2 non è altro che un modo sintetico per scrivere $b \times b$.

- La parte numerica di un monomio è detta **coefficiente**. Ad esempio in $2ab^2$ il coefficiente è 2; in $\sqrt{3}ax$ il coefficiente è $\sqrt{3}$.
- L'insieme dei fattori letterali è detta **parte letterale**, quindi ab^2 è la parte letterale di $2ab^2$.
- Ogni lettera può apparire elevata ad un esponente, come ad esempio la lettera b in ab^2. Chiaramente b^2 non è altro che un modo sintetico per scrivere $b \times b$.

Attenzione

Gli esponenti dei fattori letterali devono essere numeri naturali, e la loro somma si dice **grado** del monomio.

Monomi simili

- Due monomi sono detti **simili** se hanno la stessa parte letterale. Non basta che compaiano le stesse lettere, devono avere uguali anche gli esponenti!

Monomi simili

- Due monomi sono detti **simili** se hanno la stessa parte letterale. Non basta che compaiano le stesse lettere, devono avere uguali anche gli esponenti!
- $3ab^2$ e $12b^2a$ **sono simili**. In una moltiplicazione l'ordine dei fattori non ha importanza!

Monomi simili

- Due monomi sono detti **simili** se hanno la stessa parte letterale. Non basta che compaiano le stesse lettere, devono avere uguali anche gli esponenti!
- $3ab^2$ e $12b^2a$ **sono simili**. In una moltiplicazione l'ordine dei fattori non ha importanza!
- ab^2 e $12ba$ **non sono simili**. La lettera b appare con due diversi esponenti nei due monomi.

Monomi simili

- Due monomi sono detti **simili** se hanno la stessa parte letterale. Non basta che compaiano le stesse lettere, devono avere uguali anche gli esponenti!
- $3ab^2$ e $12b^2a$ **sono simili**. In una moltiplicazione l'ordine dei fattori non ha importanza!
- ab^2 e $12ba$ **non sono simili**. La lettera b appare con due diversi esponenti nei due monomi.
- $3ab^2$ e $3ba^2$ **non sono simili**.Sia a che b hanno esponenti diversi.

Monomi simili

- Due monomi sono detti **simili** se hanno la stessa parte letterale. Non basta che compaiano le stesse lettere, devono avere uguali anche gli esponenti!
- $3ab^2$ e $12b^2a$ **sono simili**. In una moltiplicazione l'ordine dei fattori non ha importanza!
- ab^2 e $12ba$ **non sono simili**. La lettera b appare con due diversi esponenti nei due monomi.
- $3ab^2$ e $3ba^2$ **non sono simili**.Sia a che b hanno esponenti diversi.

Somma di monomi

- Due o più monomi **simili** possono essere **sommati** e **sottratti**.

Somma di monomi

- Due o più monomi **simili** possono essere **sommati** e **sottratti**.
- $3ab^2 + 12b^2a = 15ab^2$.
- Quindi si ottiene un nuovo monomio con la stessa parte letterale e come nuova parte numerica la somma delle parti numeriche.

Somma di monomi

- Due o più monomi **simili** possono essere **sommati** e **sottratti**.
- $3ab^2 + 12b^2a = 15ab^2$.
- Quindi si ottiene un nuovo monomio con la stessa parte letterale e come nuova parte numerica la somma delle parti numeriche.
- $3ab^2$ e $3ba^2$ **non sono simili** e quindi **non possono essere sommati**.

Somma di monomi

- Due o più monomi **simili** possono essere **sommati** e **sottratti**.
- $3ab^2 + 12b^2a = 15ab^2$.
- Quindi si ottiene un nuovo monomio con la stessa parte letterale e come nuova parte numerica la somma delle parti numeriche.
- $3ab^2$ e $3ba^2$ **non sono simili** e quindi **non possono essere sommati**.
- Si possono sottrarre $2xy$ e $\sqrt{2}xy$? Quanto fa la loro differenza?

Somma di monomi

- Due o più monomi **simili** possono essere **sommati** e **sottratti**.
- $3ab^2 + 12b^2a = 15ab^2$.
- Quindi si ottiene un nuovo monomio con la stessa parte letterale e come nuova parte numerica la somma delle parti numeriche.
- $3ab^2$ e $3ba^2$ **non sono simili** e quindi **non possono essere sommati**.
- Si possono sottrarre $2xy$ e $\sqrt{2}xy$? Quanto fa la loro differenza?

Attenzione

La somma è la differenza di due monomi che non sono simili non da come risultato un monomio ma un polinomio, che definiremo tra poco.

Monomi opposti

- Due monomi si dicono **opposti** se sono in tutto uguali tranne che per il segno.

Monomi opposti

- Due monomi si dicono **opposti** se sono in tutto uguali tranne che per il segno.
- $3ab^2 \text{ e } -3b^2a$ sono opposti.

Monomi opposti

- Due monomi si dicono **opposti** se sono in tutto uguali tranne che per il segno.
- $3ab^2 \text{ e } -3b^2a$ sono opposti.
- La somma di due monomi opposti da zero.

Monomi opposti

- Due monomi si dicono **opposti** se sono in tutto uguali tranne che per il segno.
- $3ab^2 \text{ e } -3b^2a$ sono opposti.
- La somma di due monomi opposti da zero.
- La divisione tra due monomi opposti da -1.

Prodotto tra monomi simili

- Due monomi simili possono essere moltiplicati.
- Il coefficiente numerico è dato dal prodotto dei coefficienti numerici;
- Nella parte letterale compaiono le lettere ognuna con grado pari al doppio.

Prodotto tra monomi simili

- Due monomi simili possono essere moltiplicati.
- Il coefficiente numerico è dato dal prodotto dei coefficienti numerici;
- Nella parte letterale compaiono le lettere ognuna con grado pari al doppio.
- $3ab^2 \times 12b^2a = 36a^2b^4$.

Prodotto tra monomi simili

- Due monomi simili possono essere moltiplicati.
- Il coefficiente numerico è dato dal prodotto dei coefficienti numerici;
- Nella parte letterale compaiono le lettere ognuna con grado pari al doppio.
- $3ab^2 \times 12b^2a = 36a^2b^4$.
- Esegui le seguenti moltiplicazione tra monomi simili:

$$(\sqrt[3]{2}x^2y)(2x^2y)(2\sqrt{2}x^2y) = \dots$$

$$\left(\frac{1}{5}\pi z^2 wa\right)(2\pi z^2 wa)\left(\frac{1}{2}\pi z^2 wa\right) = \dots$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}A^3b^2\right)(2A^3b^2) = \dots$$

Prodotto tra monomi non simili

- **Anche monomi non simili possono essere moltiplicati tra di loro.**

Prodotto tra monomi non simili

- **Anche monomi non simili possono essere moltiplicati tra di loro**.
- $3ab^2 \times 12x^3ay^2 = 36a^2b^2x^3y^2$.

Prodotto tra monomi non simili

- **Anche monomi non simili possono essere moltiplicati tra di loro**.
- $3ab^2 \times 12x^3ay^2 = 36a^2b^2x^3y^2$.
- Quale monomio si ottiene eseguendo questa moltiplicazione tra monomi $(3ab^2) \times (-2xy^3b^3)$?

Prodotto tra monomi non simili

- **Anche monomi non simili possono essere moltiplicati tra di loro**.
- $3ab^2 \times 12x^3ay^2 = 36a^2b^2x^3y^2$.
- Quale monomio si ottiene eseguendo questa moltiplicazione tra monomi $(3ab^2) \times (-2xy^3b^3)$?
- Si ottiene un nuovo monomio che ha come coefficiente numerico il prodotto dei coefficienti e come parte letterale tutti i fattori che figurano nei due monomi, ognuna con esponente pari alla somma degli esponenti che quel fattore ha nei due monomi:
  $(3ab^2) \times (-2xy^3b^3) = -6ab^5xy^3$.

Potenza di un monomio

- La potenza di un monomio si ottiene elevando a potenza **ogni singolo fattore del monomio, sia numerico che letterale**.
- Corrisponde alla moltiplicazione dello stesso monomio per se stesso tante volte quante dice l'esponente.

Potenza di un monomio

- La potenza di un monomio si ottiene elevando a potenza **ogni singolo fattore del monomio, sia numerico che letterale**.
- Corrisponde alla moltiplicazione dello stesso monomio per se stesso tante volte quante dice l'esponente.
- Elevando al quadrato $3ab^2$ si ottiene $\left(3ab^2\right)^2 = 9a^2b^4$.

Potenza di un monomio

- La potenza di un monomio si ottiene elevando a potenza **ogni singolo fattore del monomio, sia numerico che letterale**.
- Corrisponde alla moltiplicazione dello stesso monomio per se stesso tante volte quante dice l'esponente.
- Elevando al quadrato $3ab^2$ si ottiene $\left(3ab^2\right)^2 = 9a^2b^4$.
- Elevando al cubo $3ab^2$ si ottiene $\left(3ab^2\right)^3 = 27a^3b^6$.

Potenza di un monomio

- La potenza di un monomio si ottiene elevando a potenza **ogni singolo fattore del monomio, sia numerico che letterale**.
- Corrisponde alla moltiplicazione dello stesso monomio per se stesso tante volte quante dice l'esponente.
- Elevando al quadrato $3ab^2$ si ottiene $\left(3ab^2\right)^2 = 9a^2b^4$.
- Elevando al cubo $3ab^2$ si ottiene $\left(3ab^2\right)^3 = 27a^3b^6$.
- Cosa si ottiene elevando alla quarta $2xy$ e $\sqrt{2}xy$?

Divisione tra monomi simili

- La divisione tra due monomi **simili** è sempre possibile: il risultato è la divisione tra i coefficienti $12ab^2 \div 3ab^2 = 4$.

Divisione tra monomi simili

- La divisione tra due monomi **simili** è sempre possibile: il risultato è la divisione tra i coefficienti $12ab^2 \div 3ab^2 = 4$.
- $\sqrt{3}x^2y^3 \div 5x^2y^3 = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Divisione tra monomi simili

- La divisione tra due monomi **simili** è sempre possibile: il risultato è la divisione tra i coefficienti $12ab^2 \div 3ab^2 = 4$.
- $\sqrt{3}x^2y^3 \div 5x^2y^3 = \frac{\sqrt{3}}{5}$.
- Esegui le seguenti operazioni (moltiplicazioni e divisioni) tra monomi simili:

$$(\sqrt[3]{2}x^2y)(2x^2y) \div (2\sqrt{2}x^2y) = \dots$$

$$\left(\frac{1}{5}\pi z^2wa\right) \div (2\pi z^2wa)\left(\frac{1}{2}\pi z^2wa\right) = \dots$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}A^3b^2\right) \div (2A^3b^2) = \dots$$

Divisione tra monomi non simili 1

- Se i monomi non sono simili la divisione si può ancora eseguire.
- Se i due monomi hanno gli stessi fattori letterali, anche se con esponente diversi, e **ogni fattore letterale al numeratore compare con esponente maggiore o uguale**, allora il risultato sarà un nuovo monomio

Divisione tra monomi non simili 1

- Se i monomi non sono simili la divisione si può ancora eseguire.
- Se i due monomi hanno gli stessi fattori letterali, anche se con esponente diversi, e **ogni fattore letterale al numeratore compare con esponente maggiore o uguale**, allora il risultato sarà un nuovo monomio
- Dire quale tra queste divisioni darà come risultato un monomio:

$$(12a^3b^2) \div (\sqrt{10}ab),$$

$$(105x^5a^2w^3z) \div (2x^4aw^2),$$

$$(12x^2y) \div (4xy^2).$$

Divisione tra monomi non simili 2

Attenzione

Se non è verificata la condizione enunciata nella precedente slide la divisione tra monomi è ancora possibile, ma il risultato non è un monomio ma una **frazione algebrica**, ovvero una espressione frazionaria con lettere al denominatore

- Si ha ad esempio che:
$$\frac{5ab}{15a^2b^3} = \frac{1}{3ab^2}$$
$$\frac{105x^3a^2w^3z}{5x^4aw^2z^3} = 21\frac{aw}{xz^2}$$
- Queste espressioni non sono monomi avendo lettere anche al denominatore, ovvero sono frazioni algebriche.
- Questa operazione ci fa quindi uscire dall'insieme dei monomi.

Massimo comun divisore tra monomi

MCD

Il MCD tra diversi monomi è un monomio di grado massimo che divide tutti i monomi.

Parte letterale

La parte letterale del MCD si ottiene prendendo solo i fattori letterali comuni a tutti i monomi con il minore esponente.

Parte numerica

Come parte numerica, o coefficiente, si può prendere il MCD delle diverse parti numeriche, con il segno $+$. Se i coefficienti non hanno un MCD si prende 1 come coefficiente del monomio MCD.

MCD tra monomi

Esempio 1

Il MCD tra i seguenti monomi $3ab^2c^3$, $27a^2b^3c^2$, $-12a^2bc^4$.

MCD tra monomi

Esempio 1

Il MCD tra i seguenti monomi $3ab^2c^3$, $27a^2b^3c^2$, $-12a^2bc^4$.

Soluzione

$$3abc^2$$

MCD tra monomi

Esempio 1

Il MCD tra i seguenti monomi $3ab^2c^3$, $27a^2b^3c^2$, $-12a^2bc^4$.

Soluzione

$$3abc^2$$

Esempio 2

Il MCD tra i seguenti monomi $2x^2y$, $-\sqrt{2}xy^2$, $3x^2y^3$.

MCD tra monomi

Esempio 1

Il MCD tra i seguenti monomi $3ab^2c^3$, $27a^2b^3c^2$, $-12a^2bc^4$.

Soluzione

$$3abc^2$$

Esempio 2

Il MCD tra i seguenti monomi $2x^2y$, $-\sqrt{2}xy^2$, $3x^2y^3$.

Soluzione

$$xy$$

MCD tra monomi

Esempio 1

Il MCD tra i seguenti monomi $3ab^2c^3$, $27a^2b^3c^2$, $-12a^2bc^4$.

Soluzione

$$3abc^2$$

Esempio 2

Il MCD tra i seguenti monomi $2x^2y$, $-\sqrt{2}xy^2$, $3x^2y^3$.

Soluzione

$$xy$$

Esempio 3

Il MCD tra i seguenti monomi $\frac{1}{2}abc$, $-3xy$, $5z$?

Minimo comune multiplo tra monomi

mcm

Il mcm tra diversi monomi è un monomio di grado minimo divisibile per tutti i monomi.

Parte letterale

La parte letterale del mcm si ottiene prendendo il fattore di tutti i fattori letterali, comuni e non comuni, con ogni lettera presa con l'esponente più alto.

Parte numerica

Come parte numerica, o coefficiente, si può prendere il mcm delle diverse parti numeriche, con il segno $+$. Se i coefficienti non hanno un mcm si prende 1 come coefficiente del monomio mcm.

Esempio 1

Il mcm tra i seguenti monomi $3ab^2c^3$, $27a^2b^3c^2$, $-12a^2bc^4$.

Esempio 1

Il mcm tra i seguenti monomi $3ab^2c^3$, $27a^2b^3c^2$, $-12a^2bc^4$.

Soluzione

$$108a^2b^3c^4$$

mcm tra monomi

Esempio 1

Il mcm tra i seguenti monomi $3ab^2c^3$, $27a^2b^3c^2$, $-12a^2bc^4$.

Soluzione

$$108a^2b^3c^4$$

Esempio 2

Il mcm tra i seguenti monomi $\frac{1}{2}x^2y$, $-\sqrt{2}xy^2$, $3x^2y^3$.

mcm tra monomi

Esempio 1

Il mcm tra i seguenti monomi $3ab^2c^3$, $27a^2b^3c^2$, $-12a^2bc^4$.

Soluzione

$$108a^2b^3c^4$$

Esempio 2

Il mcm tra i seguenti monomi $\frac{1}{2}x^2y$, $-\sqrt{2}xy^2$, $3x^2y^3$.

Soluzione

$$x^2y^3$$

mcm tra monomi

Esempio 1

Il mcm tra i seguenti monomi $3ab^2c^3$, $27a^2b^3c^2$, $-12a^2bc^4$.

Soluzione

$$108a^2b^3c^4$$

Esempio 2

Il mcm tra i seguenti monomi $\frac{1}{2}x^2y$, $-\sqrt{2}xy^2$, $3x^2y^3$.

Soluzione

$$x^2y^3$$

Esempio 3

Il mcm tra i seguenti monomi $\frac{1}{2}abc$, $-3xy$, $5z^5$?

Addizione tra polinomi

Addizione

Si sommano tra loro i monomi simili.

Esempio

$$(2ab^2 + 3abc + ac^3) + (abc + 4ac^3 - 7a^2b) + (8a^2b - ab^2)$$

Addizione

Si sommano tra loro i monomi simili.

Esempio

$$(2ab^2 + 3abc + ac^3) + (abc + 4ac^3 - 7a^2b) + (8a^2b - ab^2)$$

Soluzione

$$ab^2 + 4abc + 5ac^3 + a^2b$$

Esercizio

$$\left(\frac{1}{3}z^3y + 2ab - \sqrt{3}xy\right) + (2xy - z^3y + 5abc) + \left(\sqrt{3}xy - acb - \frac{2}{3}yz^3\right)$$

.

Moltiplicazione

Moltiplicazione per un monomio

Si moltiplica ogni termine del polinomio per il monomio dato.

Esempio

$$(2ab^2 + 3abc + ac^3) \cdot (-3ab) = -6a^2b^3 - 9a^2b^2c - 3a^2bc^3$$

Moltiplicazione

Moltiplicazione per un monomio

Si moltiplica ogni termine del polinomio per il monomio dato.

Esempio

$$(2ab^2 + 3abc + ac^3) \cdot (-3ab) = -6a^2b^3 - 9a^2b^2c - 3a^2bc^3$$

Moltiplicazione di due polinomi

Si moltiplica ogni termine del primo polinomio per ciascun termine dell'altro, e si semplificano i termini simili.

Esempio

$$(2ab^2 + 3abc + ac^3) \cdot (-3ab + ac^2) = ?$$

Quoziente e resto

Indichiamo con il simbolo $P_n(x)$ un polinomio di grado n, in cui compare la sola lettera x. Allora $D_m(x)$ indica un polinomio nella sola lettera x di grado m, e supponiamo $m \leq n$.

Teorema

Esistono, e sono unici, due polinomi $q(x)$, di grado $n - m$, e $r(x)$, di grado $t < m$, tali che:

$$P(x) = q(x)D(x) + r(x), \quad \text{ovvero} \quad \frac{P(x)}{D(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{D(x)}$$

Il polinomio $q(x)$ è detto **quoziente**, il polinomio $r(x)$ è detto **resto**. Se si ottiene $r(x) = 0$ allora $P(x)$ è **divisibile** per il polinomio $D(x)$, e la divisione che non dà resto è detta **esatta**.

Come si esegue la divisione

Si consideri il rapporto tra due polinomi $P(x) = 3x^4 + 1$ di grado $n = 4$, e $D(X) = -x^3 - x^2 + 4)$ di grado $m = 3$:

$$(3x^4 + 1) : (-x^3 - x^2 + 4)$$

Si esegue come una divisione numerica:

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
3x^4 & +0 \cdot x^3 & +0 \cdot x^2 & +0 \cdot x & +1 & -x^3 & -x^2 & +4 \\
\cline{6-8}
3x^4 & +3x^3 & & -12x & & -3x & +3 & \\
\cline{1-5}
 & -3x^3 & & +12x & +1 & & & \\
 & -3x^3 & -3x^2 & & +12 & & & \\
\cline{2-5}
 & & +3x^2 & +12x & -11 & & &
\end{array}$$

Per cui si ha $q(x) = -3x + 3$ e $r(x) = 3x^2 + 12x - 11$. E quindi

$$3x^4 + 1 = (-3x + 3) \cdot (-x^3 - x^2 + 4) + (3x^2 + 12x - 11)$$

Regola di Ruffini

Regola del resto

Il resto della divisione di un polinomio $P(x)$ per un polinomio $D(x) = x - a$ è pari al valore che assume il polinomio $P(x)$ quando al posto di x si sostituisce a.

Teorema

Il polinomio $P(x)$ è divisible per il binomio $x - a$ se e solo se $P(a) = 0$.

Proprietà invariantiva

Se si moltiplica dividendo e divisore per lo stesso numero il quoziente non cambia, e il resto risulta moltiplicato per lo stesso numero.

Calcoliamo quoziente e resto di $(x^4 + 3x^3 - x - 3) : (x + 3)$:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & +1 & +3 & 0 & -1 & -3 \\ & & & & & \\ -3 & & -3 & 0 & 0 & +3 \\ \hline & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

Da qui si ottiene: $q(x) = x^3 - 1$ e $r(x) = 0$, ovvero che

$$(x^4 + 3x^3 - x - 3) = (x + 3)(x^3 - 1)$$

. Questo vuol dire anche che $x = -3$ è una soluzione dell'equazione

$$x^4 + 3x^3 - x - 3 = 0$$

Prodotti notevoli

- $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ e $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$
- $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

Scomposizione in fattori primi

- Un polinomi si dice **primo** quando non è divisibile per alcun monomio, oltre se stesso o una costante.
- Se non è primo vorremmo ridurlo al prodotto di polinomi primi. Ovvero vorremmo determinare tutti i suoi divisori.
- Alcune tecniche sono:
  - Raccogliamo il fattore comune.
  - Raccoglimento parziale
  - Scomposizione mediante i prodotti notevoli
  - Scomposizione dei binomi del tipo $A^n + B^n$ e $A^n - B^n$
  - Scomposizione del trinomio notevole $x^2 - (a + b)x + ab$
  - Regola di Ruffini

Teorema

Affinché il polinomio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ sia divisibile per $x \pm b$ il termine noto a_n deve essere divisibile per b.