I radicali questi sconosciuti

Luciano Seta

25 ottobre 2016

La radice n-esima

- Se $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, ed $n \in \mathbb{N}_0$, esiste **uno ed un solo** numero reale $b > 0$ tale che $b^n = a$.

La radice n-esima

- Se $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, ed $n \in \mathbb{N}_0$, esiste **uno ed un solo** numero reale $b > 0$ tale che $b^n = a$.
- Il numero **reale e positivo** b si dice radice aritmetica n-esima di a.

La radice n-esima

- Se $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, ed $n \in \mathbb{N}_0$, esiste **uno ed un solo** numero reale $b > 0$ tale che $b^n = a$.
- Il numero **reale e positivo** b si dice radice aritmetica n-esima di a.
- Si indica con il simbolo $\sqrt[n]{a}$, oppure $a^{1/n}$.

La radice n-esima

- Se $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, ed $n \in \mathbb{N}_0$, esiste **uno ed un solo** numero reale $b > 0$ tale che $b^n = a$.
- Il numero **reale e positivo** b si dice radice aritmetica n-esima di a.
- Si indica con il simbolo $\sqrt[n]{a}$, oppure $a^{1/n}$.
- L'operazione di estrazione di radice aritmetica è definita solo per numeri reali assoluti.

La radice n-esima con radicando letterale

- Se il radicando contiene oltre a numeri anche delle lettere è necessario procedere con cautela:

La radice n-esima con radicando letterale

- Se il radicando contiene oltre a numeri anche delle lettere è necessario procedere con cautela:
- Bisogna imporre opportune **condizioni di esistenza**.

La radice n-esima con radicando letterale

- Se il radicando contiene oltre a numeri anche delle lettere è necessario procedere con cautela:
- Bisogna imporre opportune **condizioni di esistenza**.
- $\sqrt[n]{\dfrac{a+1}{b^4}}$, il radicando deve essere $\frac{a+1}{b^4} \geq 0$

La radice n-esima con radicando letterale

- Se il radicando contiene oltre a numeri anche delle lettere è necessario procedere con cautela:
- Bisogna imporre opportune **condizioni di esistenza**.
- $\sqrt[n]{\dfrac{a+1}{b^4}}$, il radicando deve essere $\frac{a+1}{b^4} \geq 0$
- Ovvero $a+1 \geq 0$ e $b > 0$, e quindi $a \geq -1$ e $b > 0$.

Proviamo

- $\sqrt[8]{a^2 + 1}$.

Proviamo

- $\sqrt[8]{a^2+1}$.
- $\sqrt{|a-2b|}$.

Proviamo

- $\sqrt[8]{a^2 + 1}$.
- $\sqrt{|a - 2b|}$.
- $\sqrt[5]{\frac{a^2}{b}}$.

Proviamo

- $\sqrt[8]{a^2+1}$.
- $\sqrt{|a-2b|}$.
- $\sqrt[5]{\dfrac{a^2}{b}}$.
- $\sqrt[5]{\dfrac{a^2}{|b-2|}}$.

La radice algebrica n-esima

- Vogliamo definire la radice non solo per $\mathbb{R}^+$ ma per tutto $\mathbb{R}$.

La radice algebrica n-esima

- Vogliamo definire la radice non solo per $\mathbb{R}^+$ ma per tutto $\mathbb{R}$.
- La radice n-esima di un **numero relativo** a è ogni numero reale x che risolva l'equazione $x^n = a$.

La radice algebrica n-esima

- Vogliamo definire la radice non solo per $\mathbb{R}^+$ ma per tutto $\mathbb{R}$.
- La radice n-esima di un **numero relativo** a è ogni numero reale x che risolva l'equazione $x^n = a$.
- Non è detto né che la soluzione esiste e né che sia unica.

La radice algebrica n-esima

- Vogliamo definire la radice non solo per $\mathbb{R}^+$ ma per tutto $\mathbb{R}$.
- La radice n-esima di un **numero relativo** a è ogni numero reale x che risolva l'equazione $x^n = a$.
- Non è detto né che la soluzione esiste e né che sia unica.
- Radici: $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{-25}$.

La radice algebrica n-esima

- Vogliamo definire la radice non solo per $\mathbb{R}^+$ ma per tutto $\mathbb{R}$.
- La radice n-esima di un **numero relativo** a è ogni numero reale x che risolva l'equazione $x^n = a$.
- Non è detto né che la soluzione esiste e né che sia unica.
- Radici: $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{-25}$.
- Equazioni: $x^3 = 27$, $x^3 = -27$, $x^2 = 25$, $x^2 = -25$.

La radice algebrica n-esima

- Vogliamo definire la radice non solo per $\mathbb{R}^+$ ma per tutto $\mathbb{R}$.
- La radice n-esima di un **numero relativo** a è ogni numero reale x che risolva l'equazione $x^n = a$.
- Non è detto né che la soluzione esiste e né che sia unica.
- Radici: $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{-25}$.
- Equazioni: $x^3 = 27$, $x^3 = -27$, $x^2 = 25$, $x^2 = -25$.
- Soluzioni: $\{+3\}$, $\{-3\}$, $\{-5, +5\}$, $\emptyset$

La radice algebrica n-esima. Riepilogo

- La radice n-esima algebrica di indice n dispari di un numero intero relativo a esiste sempre: ha lo stesso segno di a e modulo pari alla radice aritmetica di $|a|$.

La radice algebrica n-esima. Riepilogo

- La radice n-esima algebrica di indice n dispari di un numero intero relativo a esiste sempre: ha lo stesso segno di a e modulo pari alla radice aritmetica di $|a|$.
- La radice n-esima algebrica di indice n pari di un numero intero relativo a esiste solo se $a \geq 0$, ma non è unica dato che che possiamo prendere sia $+\sqrt[n]{|a|}$ che $-\sqrt[n]{|a|}$.

La radice algebrica n-esima. Riepilogo

- La radice n-esima algebrica di indice n dispari di un numero intero relativo a esiste sempre: ha lo stesso segno di a e modulo pari alla radice aritmetica di $|a|$.
- La radice n-esima algebrica di indice n pari di un numero intero relativo a esiste solo se $a \geq 0$, ma non è unica dato che che possiamo prendere sia $+\sqrt[n]{|a|}$ che $-\sqrt[n]{|a|}$.
- La radice n-esima algebrica di indice n pari di un numero intero relativo a non esiste se $a < 0$.

La proprietà invariantiva

- Se l'indice del radicale e l'esponente del radicando vengono moltiplicati o divisi per lo stesso numero p (intero non nullo) si ottiene un radicale equivalente.

La proprietà invariantiva

- Se l'indice del radicale e l'esponente del radicando vengono moltiplicati o divisi per lo stesso numero p (intero non nullo) si ottiene un radicale equivalente.
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = a^{mp/np} = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

La proprietà invariantiva

- Se l'indice del radicale e l'esponente del radicando vengono moltiplicati o divisi per lo stesso numero p (intero non nullo) si ottiene un radicale equivalente.
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = a^{mp/np} = \sqrt[np]{a^{mp}}$.
- $\sqrt{a^2} = \left(a^2\right)^{1/2} = |a|$.

Riduzione ad un indice comune

- Si calcola il **minimo comune multiplo** degli indici dei radicali e lo si assume come nuove indice comune;

Riduzione ad un indice comune

- Si calcola il **minimo comune multiplo** degli indici dei radicali e lo si assume come nuove indice comune;
- Si moltiplica l'esponente di ogni radicando per il quoziente tra il m.c.m. e l'indice del radicale considerato.

Riduzione ad un indice comune

- Si calcola il **minimo comune multiplo** degli indici dei radicali e lo si assume come nuove indice comune;
- Si moltiplica l'esponente di ogni radicando per il quoziente tra il m.c.m. e l'indice del radicale considerato.
- $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[2]{7}$. Minimo Comune Indice tra $\{4, 6, 2\}$ è $\{12\}$.

Riduzione ad un indice comune

- Si calcola il **minimo comune multiplo** degli indici dei radicali e lo si assume come nuove indice comune;
- Si moltiplica l'esponente di ogni radicando per il quoziente tra il m.c.m. e l'indice del radicale considerato.
- $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[2]{7}$. Minimo Comune Indice tra $\{4, 6, 2\}$ è $\{12\}$.
- $\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3}$, $\sqrt[6]{2} = \sqrt[12]{2^2}$, $\sqrt[2]{7} = \sqrt[12]{7^6}$.

Addizione e sottrazione

- Si sommano e si sottraggono solo i radicali **simili**, cioè quelli aventi lo stesso indice e lo stesso radicando

Addizione e sottrazione

- Si sommano e si sottraggono solo i radicali **simili**, cioè quelli aventi lo stesso indice e lo stesso radicando
- Simili: $2\sqrt[3]{3}$, $-5\sqrt[3]{3}$, $\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$.

Addizione e sottrazione

- Si sommano e si sottraggono solo i radicali **simili**, cioè quelli aventi lo stesso indice e lo stesso radicando
- Simili: $2\sqrt[3]{3}$, $-5\sqrt[3]{3}$, $\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$.
- Simili: $\sqrt[4]{a^2+1}$, $3\sqrt[4]{a^2+1}$, $(b+1)\sqrt[4]{a^2+1}$.

Moltiplicazione e divisione

- Se i radicali hanno lo stesso indice si moltiplicano i radicandi e si lascia lo stesso indice.

Moltiplicazione e divisione

- Se i radicali hanno lo stesso indice si moltiplicano i radicandi e si lascia lo stesso indice.
- $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{10} = \sqrt[5]{2 \cdot 10} = \sqrt[5]{10}$.
- $\sqrt[6]{(x-y)^5} \cdot \sqrt[6]{x-y}$. Bisogna avere che $x \geqslant y$, quindi $\sqrt[6]{(x-y)^5} \cdot \sqrt[6]{x-y} = \sqrt[6]{(x-y)^6} = |x-y| = x-y$, data la condizione $x - y \geqslant 0$.

Moltiplicazione e divisione

- Se i radicali hanno lo stesso indice si moltiplicano i radicandi e si lascia lo stesso indice.
- $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{10} = \sqrt[5]{2 \cdot 10} = \sqrt[5]{10}$.
- $\sqrt[6]{(x-y)^5} \cdot \sqrt[6]{x-y}$. Bisogna avere che $x \geqslant y$, quindi $\sqrt[6]{(x-y)^5} \cdot \sqrt[6]{x-y} = \sqrt[6]{(x-y)^6} = |x-y| = x-y$, data la condizione $x - y \geqslant 0$.
- Se i radicali hanno lo stesso indice si dividono i radicandi e si lascia lo stesso indice.

Moltiplicazione e divisione

- Se i radicali hanno lo stesso indice si moltiplicano i radicandi e si lascia lo stesso indice.
- $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{10} = \sqrt[5]{2 \cdot 10} = \sqrt[5]{10}$.
- $\sqrt[6]{(x-y)^5} \cdot \sqrt[6]{x-y}$. Bisogna avere che $x \geqslant y$, quindi $\sqrt[6]{(x-y)^5} \cdot \sqrt[6]{x-y} = \sqrt[6]{(x-y)^6} = |x-y| = x-y$, data la condizione $x - y \geqslant 0$.
- Se i radicali hanno lo stesso indice si dividono i radicandi e si lascia lo stesso indice.
- $\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2} : \sqrt[4]{a+b}$. Condizione $a+b \geqslant 0$, ma deve essere anche $a+b \neq 0$.

  $$\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2} : \sqrt[4]{a+b} = \sqrt[4]{\frac{(a+b)^2}{a+b}} = \sqrt[4]{a+b}.$$

Potenza di un radicale

- Si può elevare il solo radicando

Potenza di un radicale

- Si può elevare il solo radicando
- $\left(\sqrt[n]{A}\right)^k = \left(A^{1/n}\right)^k = A^{k/n} = (k)^{1/n} = \sqrt[n]{A^k}.$

Radice di un radicale

- Prodotto degli indici

Radice di un radicale

- Prodotto degli indici
- $\sqrt[p]{\sqrt[n]{A}} = \left(A^{1/n}\right)^{1/p} = A^{1/p \cdot n} = \sqrt[p \cdot n]{A}$.

Trasporto di un fattore non negativo dentro o fuori dalla radice

- Un fattore non negativo lo si può trasportare dentro ad una radice elevandolo ad una potenza uguale all'indice della radice
- $B \cdot \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B^n \cdot A}, \quad A \geqslant 0.$

Trasporto di un fattore non negativo dentro o fuori dalla radice

- Un fattore non negativo lo si può trasportare dentro ad una radice elevandolo ad una potenza uguale all'indice della radice
- $B \cdot \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B^n \cdot A}, \quad A \geqslant 0.$
- Un fattore non negativo nel radicando che sia elevato ad una potenza multiplo dell'indice del radicale lo si può trasportare fuori dalla radice, purché si divida l'esponente per l'indice della radice.
- $\sqrt[n]{A^{kn} \cdot B} = A^k \cdot \sqrt[n]{B}.$

Radicali doppi

- Un radicale doppio è una espressione del tipo:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

Radicali doppi

- Un radicale doppio è una espressione del tipo:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

- Se $(a^2 - b)$ è un quadrato perfetto, allora sono utili le seguenti formule:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Razionalizzazione del denominatore

- Se abbiamo un radicale quadratico al denominatore si applica il procedimento:

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$$

Razionalizzazione del denominatore

- Se abbiamo un radicale quadratico al denominatore si applica il procedimento:

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$$

- Se al denominatore abbiamo un radicale irriducibile del tipo $\sqrt[n]{A^m}$, con $n > m$, si moltiplica e si divide per il radicale $\sqrt[n]{A^{n-m}}$:

$$\begin{aligned} \frac{B}{\sqrt[n]{A^m}} = \frac{B}{\sqrt[n]{A^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{A^{n-m}}}{\sqrt[n]{A^{n-m}}} &= \frac{B \cdot \sqrt[n]{A^{n-m}}}{\sqrt[n]{A^m \cdot A^{n-m}}} \\ &= \frac{B\sqrt[n]{A^{n-m}}}{\sqrt[n]{A^n}} = \frac{B\sqrt[n]{A^{n-m}}}{A} \end{aligned} \tag{1}$$

Razionalizzazione del denominatore

- Se al denominatore si trova l'espressione $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$, si procede moltiplinado e dividendo per l'espressione **coniugata** $\sqrt{A} \mp \sqrt{B}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} &= \frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} \cdot \frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} \\
&= \frac{C\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)}{\left(\sqrt{A}\right)^2-\left(\sqrt{B}\right)^2} = \frac{C\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)}{A-B} \qquad (2)
\end{aligned}
$$