

Studente: _____
Data: _____

Docente: Luciano Seta
Corso: Metodi matematici per
l'economia

Attività: Esercizi Capitolo 8

1. Sia $f(x, y) = x^2 - 4xy - y^2$. Calcola $f(2, 0)$, $f(2, -6)$ e $f(c, d)$.

$f(2, 0) =$ _____ (Semplifica la risposta.)

$f(2, -6) =$ _____ (Semplifica la risposta.)

$f(c, d) =$ _____

2. Per $f(x, y) = \ln x + y^3$, trova $f(e^2, 7)$.

$f(e^2, 7) =$ _____

3. Trova il valore della funzione $P(r, T) = \int_0^T 16e^{-rt} dt$ per i valori di r e T assegnati.

$P(4, 2)$

$P(4, 2) =$ _____ (Inserisci la risposta esatta.)

4. Trova il valore della funzione in una singola variabile.

$f(x) = G(x, 0)$ con $G(x, y) = x^2 + 8xy + y^2 - 4$

$f(x) =$ _____

5. Trova il valore della funzione f .

$f(y) = M(y, y)$ con $M(x, y) = x^2y + 2xy^2 - 5$

$f(y) =$ _____

6. Sia $f(x, y) = xy + 2x - 4y - 63$. Trova tutti i valori di x per i quali $f(x, x) = 0$.

$x =$ _____ (Se necessario, usa un punto e virgola per separare le risposte.)

7. Per la funzione $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$, trova $\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$.

$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} =$ _____

8. Considera la funzione di produzione di Cobb-Douglas $f(x, y) = 40x^{1/3}y^{2/3}$. Calcola $f(1, 8)$, $f(8, 27)$ e $f(1, 27)$.

$f(1, 8) =$ _____ (Semplifica la risposta.)

$f(8, 27) =$ _____ (Semplifica la risposta.)

$f(1, 27) =$ _____ (Semplifica la risposta.)

9. La funzione di produzione di Cobb-Douglas per un'azienda di biciclette è $f(x, y) = 17x^{0,2}y^{0,8}$, dove x è il lavoro e y il capitale impiegati. Se l'azienda utilizza 1.127 unità di lavoro e 1.654 unità di capitale, quante biciclette produrrà?

L'azienda produrrà _____ biciclette.

(Inserisci un numero intero e, se necessario, arrotonda.)

10. Un'azienda produce due modelli di tavole da surf: un modello standard e un modello da competizione. Se il modello standard è prodotto ad un costo di 50 euro e quello da competizione è prodotto con un costo di 60 euro e se i costi fissi al mese sono di 2.000 euro, allora la funzione costo è data da $C(x, y) = 2.000 + 50x + 60y$, dove x e y rappresentano rispettivamente il numero di tavole standard e di quelle da competizione prodotte al mese. Trova $C(8, 30)$.

$C(8, 30) =$ _____ euro

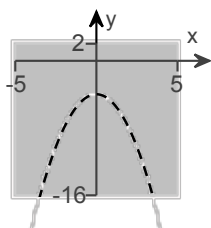
11. Trova l'insieme di definizione della funzione $f(x, y) = 9\sqrt{-4 - x^2 - y}$ e disegnalo nel piano xy .

Scegli la risposta corretta.

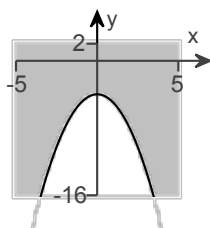
- ☐ A. L'insieme di tutte le coppie (x, y) tali che $y \leq -4 - x^2$.
- ☐ B. L'insieme di tutte le coppie (x, y) tali che $y = -4 - x^2$.
- ☐ C. L'insieme di tutte le coppie (x, y) tali che $y \neq -4 - x^2$.
- ☐ D. L'insieme di tutte le coppie (x, y) tali che $y \geq -4 - x^2$.

Scegli la regione grigia che rappresenta correttamente l'insieme di definizione della funzione f .

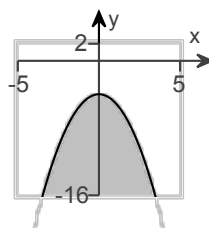
☐ A.



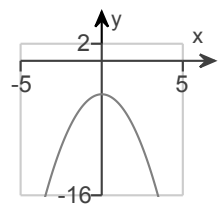
☐ B.



☐ C.



☐ D.



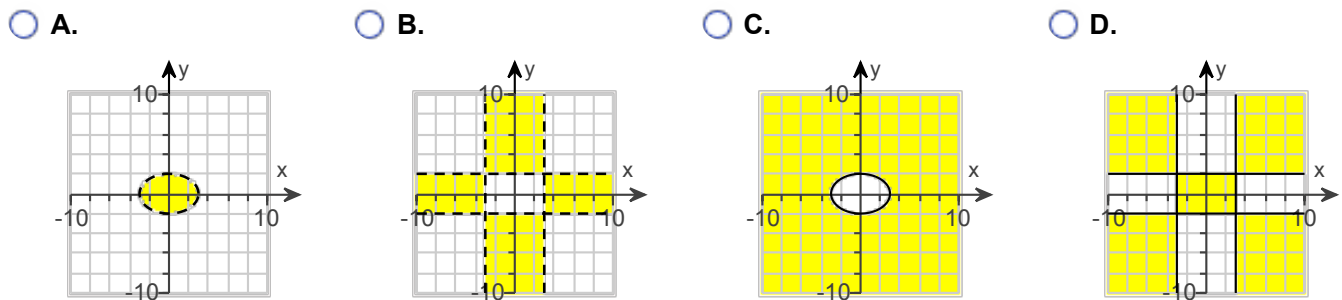
12. Trova e disegna l'insieme di definizione della funzione.

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 - 9)(y^2 - 4)}$$

Scegli la risposta corretta e, se necessario, completala.

- ☐ A. L'insieme di definizione è costituito da tutti i punti (x, y) che soddisfano _____ $\neq 0$.
- ☐ B. L'insieme di definizione è costituito da tutti i punti (x, y) che soddisfano _____ > 0 .
- ☐ C. L'insieme di definizione è costituito da tutti i punti (x, y) che soddisfano _____ ≥ 0 .
- ☐ D. Il dominio di definizione è costituito da tutti i punti del piano xy .

Scegli il disegno corretto. L'insieme di definizione è colorato in giallo.



13. Per la funzione $z = f(x, y) = 7x^3 + 9y^2 + 8xy$, trova $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $f_x(-5, 2)$ e $f_y(-5, 2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(Semplifica la risposta. Non fattorizzare.)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(Semplifica la risposta. Non fattorizzare.)

$$f_x(-5, 2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

(Semplifica la risposta.)

$$f_y(-5, 2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

(Semplifica la risposta.)

14. Trova f_x , f_y , $f_x(1,5)$ e $f_y(4,2)$ per la seguente funzione.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f_x = \underline{\hspace{2cm}}$$

(Inserisci una risposta esatta utilizzando, se necessario, i radicali.)

$$f_y = \underline{\hspace{2cm}}$$

(Inserisci una risposta esatta utilizzando, se necessario, i radicali.)

$$f_x(1,5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

(Inserisci una risposta esatta utilizzando, se necessario, i radicali.)

$$f_y(4,2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

(Inserisci una risposta esatta utilizzando, se necessario, i radicali.)

15. Per la funzione $f(x,y) = e^{13xy}$, trova f_x e f_y .

$$f_x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f_y = \underline{\hspace{2cm}}$$

16. Trova $\frac{\partial z}{\partial y}$ per $z = (4x + 7y)^9$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$$

17. Trova $f_y(8,0)$ con $f(x,y) = 14x e^y$.

$$f_y(8,0) = \underline{\hspace{2cm}}$$

18. Per la funzione $h(x,y) = \frac{(2x+3y)}{(3xy-8)}$, trova $\frac{\partial h}{\partial x}$ e $\frac{\partial h}{\partial y}$.

Scegli l'espressione corretta per $\frac{\partial h}{\partial x}$.

- ☐ A. $\frac{16x+9y}{(3xy-8)^2}$
☐ B. $\frac{-16-9y}{(3xy-8)^2}$
- ☐ C. $\frac{2x+3y}{(3xy-8)^2}$
☐ D. $\frac{-16-9y^2}{(3xy-8)^2}$

Scegli l'espressione corretta per $\frac{\partial h}{\partial y}$.

- ☐ A. $\frac{-24-6x^2}{(3xy-8)^2}$
☐ B. $\frac{24x-6y^2}{(3xy-8)^2}$
- ☐ C. $\frac{3-2x^2}{(3xy-8)^2}$
☐ D. $\frac{-24+6x^2}{(3xy-8)^2}$

19. Una funzione $f(x,y)$ soddisfa le equazioni di Laplace se $f_{xx} + f_{yy} = 0$ per ogni (x,y) nel dominio di f . Determina se $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$ soddisfa le equazioni di Laplace.

Trova f_{xx} .

$f_{xx} =$ _____

Trova f_{yy} .

$f_{yy} =$ _____

$f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$ soddisfa le equazioni di Laplace per ogni (x,y) nel dominio di f ?

- ☐ Sì
 ☐ No

20. Trova le quattro derivate parziali seconde della seguente funzione.

$$f(x,y) = \ln(7x^2 + y^2 + 3)$$

$f_{xx} =$ _____

$f_{xy} =$ _____

$f_{yy} =$ _____

$f_{yx} =$ _____

21. Se $f(x,y) = 3y^2 e^x + 4 \ln(xy)$, trova $f_{xyy}(1,1)$.

$$f_{xyy}(1,1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

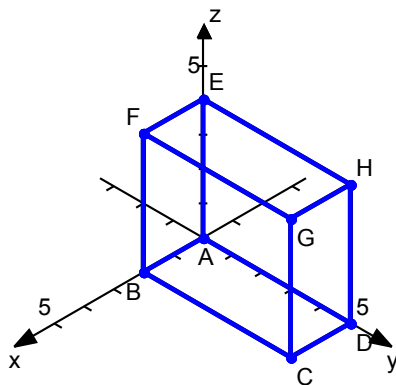
(Semplifica la risposta. Inserisci una risposta esatta in funzione di e .)

22. Verifica che $f_{xy} = f_{yx}$ per la seguente funzione.

$$f(x,y) = e^{x+y+2}$$

$$f_{xy} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad f_{yx} = \underline{\hspace{2cm}}$$

23. Trova le coordinate dei punti E e F.



Le coordinate del punto E sono

(, ,).

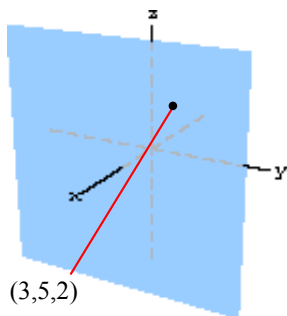
Le coordinate del punto F sono

(, ,).

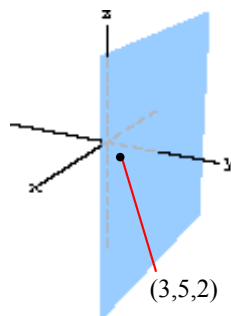
24. Disegna il piano parallelo al piano xz passante per il punto (3,5,2) e trova la sua equazione.

Disegna il piano parallelo al piano xz passante per il punto (3,5,2). Scegli la risposta corretta.

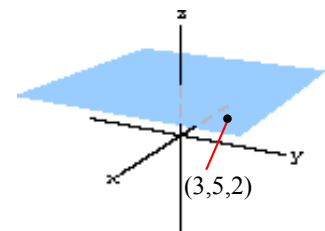
☐ A.



☐ B.



☐ C.



Qual è l'equazione del piano parallelo a xz e passante per (3,5,2)?

☐ A. $y = 5$

☐ B. $x = 3$

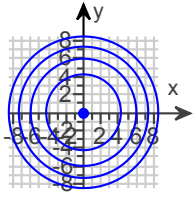
☐ C. $z = 2$

☐ D. $3x + 5y + 2z = 0$

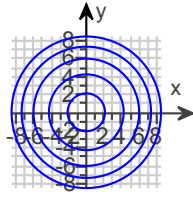
25. Disegna le curve di livello $f(x,y) = k$ di $f(x,y) = \frac{1}{6}(x^2 + y^2)$ con $k = 0, 3, 6, 9, 12$.

Scegli il grafico con le curve di livello.

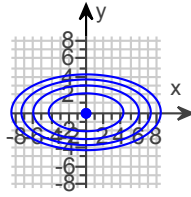
☐ A.



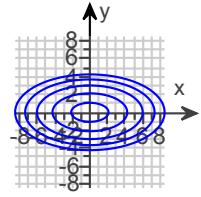
☐ B.



☐ C.



☐ D.

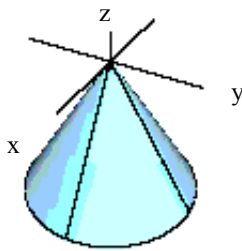


26. Determina il grafico della seguente equazione.

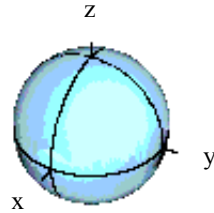
$$-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = z$$

Scegli il grafico corretto.

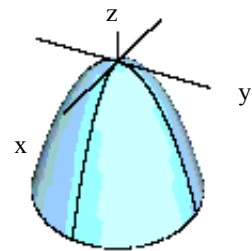
☐ A.



☐ B.



☐ C.

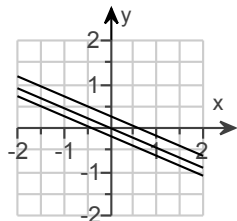


27. Descrivi la famiglia delle curve di livello della funzione $f(x,y) = 5x + 11y$. Disegna poi alcune di queste curve.

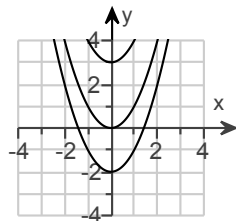
Le curve di livello della funzione costituiscono una famiglia di (1) _____ di equazione $5x + 11y = k$.

Scegli il grafico corretto.

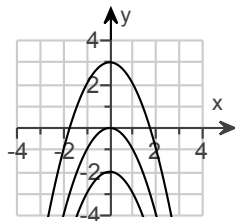
☐ A.



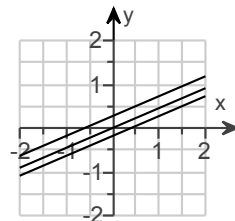
☐ B.



☐ C.



☐ D.



- (1) ☐ iperboli
☐ rette
☐ circonferenze
☐ ellissi

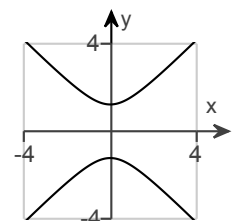
28. Determina la curva di livello della funzione $f(x,y) = \sqrt{10 - x^2 - y^2}$ per $k = 2$ e disegna tale curva.

Scegli l'equazione della curva di livello.

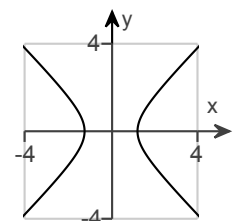
- ☐ A. $10 = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$
☐ B. $x^2 + y^2 = 6$
☐ C. $x^2 + y^2 = 2$
☐ D. $0 = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

Scegli il grafico corretto.

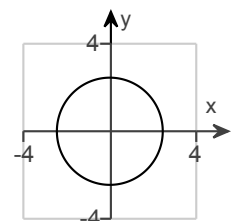
☐ A.



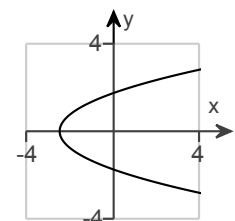
☐ B.



☐ C.



☐ D.



29. Per la funzione $f(x,y) = x^2 e^{4y}$ trova la pendenza della retta tangente lungo la direzione dell'asse x e lungo la direzione dell'asse y nel punto $(3,0,9)$.

La pendenza lungo la direzione dell'asse x in $(3,0,9)$ è _____. (Semplifica la risposta.)

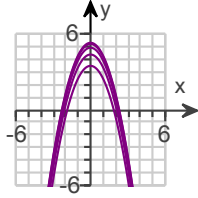
La pendenza lungo la direzione dell'asse y in $(3,0,9)$ è _____. (Semplifica la risposta.)

30. Trova le curve di livello $f(x,y) = c$ per i valori assegnati di c .

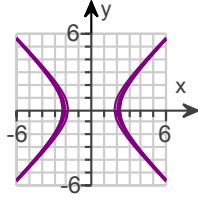
$$f(x,y) = \sqrt{28 - x^2 - y^2}, \quad c = 0, 1, 2, 3, 4$$

Scegli le curve di livello corrette.

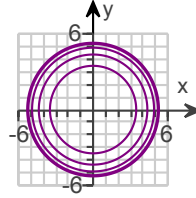
☐ A.



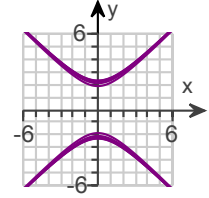
☐ B.



☐ C.



☐ D.

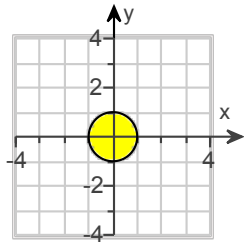


31. Trova e disegna il dominio della funzione f . Trova poi l'equazione della curva di livello che passa per il punto assegnato.

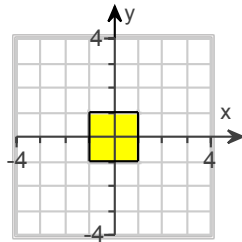
$$f(x,y) = \int_x^y \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}, \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right)$$

Qual è il dominio della funzione? Scegli il grafico corretto. Il dominio è disegnato di giallo.

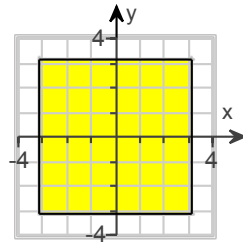
☐ A.



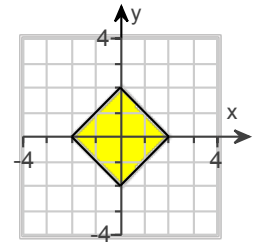
☐ B.



☐ C.



☐ D.



La curva di livello è _____. (Inserisci un'equazione.)

32. Rispondi alle domande relative alla funzione assegnata.

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$$

a. Qual è il dominio della funzione? Scegli la risposta corretta e, se necessario, completala.

- ☐ A. Il dominio è l'insieme dei punti (x,y) che soddisfano _____ ≤ 0 .
- ☐ B. Il dominio è l'insieme dei punti (x,y) che soddisfano _____ > 0 .
- ☐ C. Il dominio è l'insieme dei punti (x,y) che soddisfano _____ ≥ 0 .
- ☐ D. Il dominio è l'insieme dei punti (x,y) che soddisfano _____ < 0 .
- ☐ E. Il dominio è l'intero piano xy .

b. Qual è il codominio della funzione? Scegli la risposta corretta e, se necessario, completala.

- ☐ A. Il codominio è _____. (Inserisci la risposta sotto forma di intervallo.)
- ☐ B. Il codominio è l'insieme dei numeri reali.

c. Descrivi le curve di livello della funzione. Scegli la risposta corretta.

- ☐ A. Le curve di livello sono parabole della forma $y = cx^2$.
- ☐ B. Le curve di livello sono circonferenze centrate nell'origine con raggio $r > 1$.
- ☐ C. Per $f(x,y) = 0$, le curve di livello sono gli assi x e y . Per $f(x,y) \neq 0$, le curve di livello sono iperboli aventi gli assi cartesiani come asintoti.
- ☐ D. Per $f(x,y) = 0$, la curva di livello coincide con l'origine. Per $f(x,y) \neq 0$, le curve di livello sono ellissi centrate nell'origine e aventi l'asse x e l'asse y come asse maggiore e minore rispettivamente.

d. Trova la frontiera del dominio della funzione. Scegli la risposta corretta e, se necessario, completala.

- ☐ A. La frontiera è _____. (Inserisci un'equazione.)
- ☐ B. Non ci sono punti di frontiera.

e. Il dominio è una regione aperta, chiusa o nessuna delle due?

- ☐ A. Il dominio è aperto.
- ☐ B. Il dominio è chiuso.
- ☐ C. Il dominio non è né aperto né chiuso.

f. Il dominio è limitato o illimitato? Scegli la risposta corretta.

- ☐ A. Il dominio è illimitato.
- ☐ B. Il dominio è limitato.

33. Trova il costo marginale per il livello di produzione assegnato.

$$c = 7x + 0,1y^2 + 2y + 800; \frac{\partial c}{\partial y}, x = 50, y = 30$$

Il costo marginale è di _____ euro.
(Semplifica la risposta. Usa numeri interi o decimali.)

34. Trova le produttività marginali $\frac{\partial P}{\partial x}$ e $\frac{\partial P}{\partial y}$.

$$P = 100x^{0,62}y^{0,38}$$

$\frac{\partial P}{\partial x} =$ _____
(Semplifica la risposta. Usa numeri interi o decimali.)

$\frac{\partial P}{\partial y} =$ _____
(Semplifica la risposta. Usa numeri interi o decimali.)

35. Una stima della funzione di produzione di un caseificio è data dalla seguente funzione $P = 0,008497A^{-0,679}B^{1,021}C^{0,808}D^{2,467}$, dove P è il prodotto, A il terreno, B il lavoro, C i miglioramenti e D la liquidità.
Trova la produttività marginale del lavoro e dei miglioramenti.

$\frac{\partial P}{\partial B} =$ _____
(Semplifica la risposta. Usa numeri interi o decimali. Se necessario, arrotonda alla sesta cifra decimale.)

$\frac{\partial P}{\partial C} =$ _____
(Semplifica la risposta. Usa numeri interi o decimali. Se necessario, arrotonda alla sesta cifra decimale.)

36. La funzione $S(T,r) = 50(T - 20)(2 - r)$ rappresenta la vendita giornaliera di una gelateria in funzione della temperatura T (in $^{\circ}\text{C}$) e della pioggia r (in mm). Trova $S_r(25,1)$ (e la rispettiva unità di misura) e spiega che cosa significa.

$S_r(25,1) =$ _____ (1) _____

Spiega il significato della risposta data. Scegli la risposta corretta e completala.

- ☐ A. Le vendite aumentano di _____ euro per 1°C di temperatura quando la temperatura è di 25°C e il livello di pioggia è di 1 mm.
- ☐ B. Le vendite aumentano di _____ euro per mm di pioggia quando la temperatura è di 25°C e il livello di pioggia è di 1 mm.
- ☐ C. Le vendite diminuiscono di _____ euro per 1°C di temperatura quando la temperatura è di 25°C e il livello di pioggia è di 1 mm.
- ☐ D. Le vendite diminuiscono di _____ euro per mm di pioggia quando la temperatura è di 25°C e il livello di pioggia è di 1 mm.

- (1) ☐ mm per euro
☐ mm
☐ euro per mm
☐ euro

37. La produttività di una certa nazione con l'impiego di x unità di lavoro e di y unità di capitale è approssimata dalla seguente funzione $f(x,y) = 100x^{0,66}y^{0,34}$.

- a. Trova $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$.
- b. Se la nazione usa 500 unità di lavoro e 100 unità di capitale, trova la produttività marginale del lavoro e del capitale.
- c. Per aumentare la produttività conviene aumentare le unità di lavoro o di capitale?

a. $f_x(x,y) =$ _____

$f_y(x,y) =$ _____

b. La produttività marginale del lavoro è _____.
 (Approssima alla seconda cifra decimale, se necessario.)

La produttività marginale del capitale è _____.
 (Approssima alla seconda cifra decimale, se necessario.)

c. Per aumentare la produttività conviene aumentare le unità di (1) _____

- (1) ☐ capitale.
☐ lavoro.

38. La produttività di una certa nazione con l'utilizzo di x unità di lavoro e y unità di capitale è data approssimativamente dalla funzione $f(x,y) = 100x^{0,76}y^{0,24}$.

- (a) Calcola la produttività marginale del lavoro e del capitale quando $x = 400$ e $y = 200$.
 (b) Usa il punto (a) per determinare la variazione approssimata della produttività dovuta all'aumento del capitale da 200 a 202 unità, tenendo fisso il lavoro a 400 unità.
 (c) Quale sarà la variazione approssimata della produttività per la diminuzione del lavoro da 400 a 398,5 unità, tenendo fisso il capitale a 200 unità?

(a) La produttività marginale del lavoro è _____.
 (Non approssimare fino alla risposta finale. Approssima poi alla seconda cifra decimale, se necessario.)

La produttività marginale del capitale è _____.
 (Non approssimare fino alla risposta finale. Approssima poi alla seconda cifra decimale, se necessario.)

(b) Se il lavoro è fisso a 400 unità e il capitale aumenta da 200 a 202 unità, trova la variazione della produttività.
 _____ unità.
 (Non approssimare fino alla risposta finale. Approssima poi alla seconda cifra decimale, se necessario.)

(c) Se il capitale è fisso a 200 unità e il lavoro è sceso da 400 a 398,5 unità, trova la variazione della produttività.
 _____ unità.
 (Non approssimare fino alla risposta finale. Approssima poi alla seconda cifra decimale, se necessario.)

39. Il giornale di un college spende x migliaia di euro all'anno per la pubblicità in televisione e y migliaia di euro per i volantini pubblicitari. Il costo totale, in migliaia di euro, per la pubblicità è di $C(x,y) = 9x^2 + 7y$.

a) Trova C_x e C_y .

$C_x =$ _____

$C_y =$ _____

b) Calcola C_x e C_y in $(10,35)$.

$C_x(10,35) =$ _____ (Semplifica la risposta.)

$C_y(10,35) =$ _____ (Semplifica la risposta.)

A $C_x(10,35)$ può essere data la seguente interpretazione.

Se _____ euro sono spesi in pubblicità e _____ euro in volantini, il costo totale aumenta di _____ euro se i costi della pubblicità aumentano di 1,000 euro. (Semplifica la risposta.)

A $C_y(10,35)$ si può dare la seguente interpretazione.

Se _____ euro sono spesi in pubblicità e _____ euro in volantini, il costo totale aumenta di _____ euro se i costi dei volantini aumentano di 1,000 euro. (Semplifica la risposta.)

1. 4

16

$$c^2 - 4cd - d^2$$

2. 345

3. $4 - 4e^{-8}$

4. $x^2 - 4$

5. $3y^3 - 5$

6. $-7;9$

7. $4x + 2h$

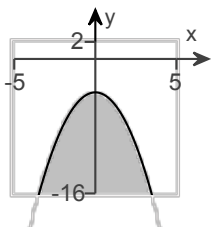
8. 160

720

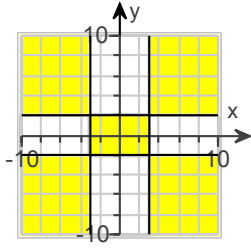
360

9. 26.041

10. 4.200

11. A. L'insieme di tutte le coppie (x,y) tali che $y \leq -4 - x^2$.C.

12. C. L'insieme di definizione è costituito da tutti i punti (x, y) che soddisfano $(x - 3)(x + 3)(y - 2)(y + 2) \geq 0$.



D.

13. $21x^2 + 8y$

$18y + 8x$

541

-4

14. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$\frac{1}{\sqrt{26}}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}$

15. $13y e^{13xy}$

$13x e^{13xy}$

16. $63(4x + 7y)^8$

17. 112

18. D. $\frac{-16 - 9y^2}{(3xy - 8)^2}$

A. $\frac{-24 - 6x^2}{(3xy - 8)^2}$

19. 4

- 4

Sì

$$20. \frac{-98x^2 + 14y^2 + 42}{(7x^2 + y^2 + 3)^2}$$

$$- \frac{28xy}{(7x^2 + y^2 + 3)^2}$$

$$\frac{14x^2 - 2y^2 + 6}{(7x^2 + y^2 + 3)^2}$$

$$- \frac{28xy}{(7x^2 + y^2 + 3)^2}$$

21. $6e$

$$22. e^{x+y+2}$$

$$e^{x+y+2}$$

23. 0

0

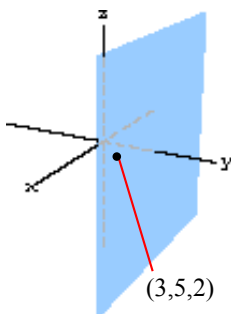
4

2

0

4

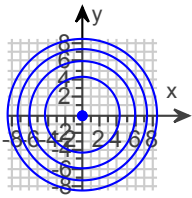
24.



B.

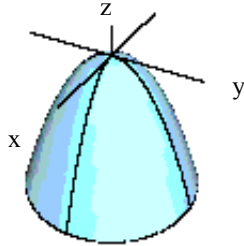
A. $y = 5$

25.



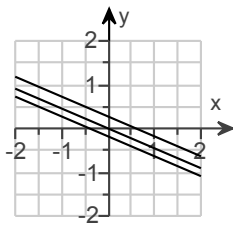
A.

26.

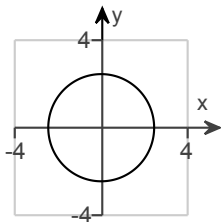


C.

27. (1) rette



A.

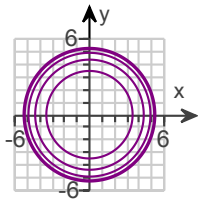
28. B. $x^2 + y^2 = 6$ 

C.

29. 6

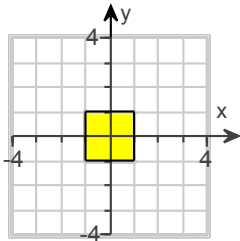
36

30.



C.

31.



B.

$$\sin^{-1} y - \sin^{-1} x = \frac{\pi}{4}$$

32. B. Il dominio è l'insieme dei punti (x,y) che soddisfano $x^2 + y^2 - 1$ > 0 .

B. Il codominio è l'insieme dei numeri reali.

B. Le curve di livello sono circonferenze centrate nell'origine con raggio $r > 1$.

A. La frontiera è $x^2 + y^2 = 1$. (Inserisci un'equazione.)

A. Il dominio è aperto.

A. Il dominio è illimitato.

33. 8

34. $62x^{-0,38}y^{0,38}$

$$38x^{0,62}y^{-0,62}$$

35. $0,008675A^{-0,679}B^{0,021}C^{0,808}D^{2,467}$

$$0,006866A^{-0,679}B^{1,021}C^{-0,192}D^{2,467}$$

36. – 250

(1) euro per mm

D.

Le vendite diminuiscono di 250 euro per mm di pioggia quando la temperatura è di 25 °C e il livello di pioggia è di 1 mm.

37. $66x^{-0,34}y^{0,34}$

$34x^{0,66}y^{-0,66}$

38,19

98,36

(1) capitale.

38. 64,35

40,64

81,28

– 96,53

39. 18x

7

180

7

10.000

35.000

180.000

10.000

35.000

7.000
