Derivate di funzioni a due variabili z=f(x,y)

- Derivate parziali prime:

$\downarrow$

Rispetto ad una variabile (considerando l'altra costante)

$\frac{\partial z}{\partial x} \rightarrow$ la y viene considerata costante;

$\frac{\partial z}{\partial y} \rightarrow$ la x viene considerata costante.

- Derivate parziali seconde:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \rightarrow$ derivo la $\frac{\partial z}{\partial x}$ considerando sempre la y costante;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \rightarrow$ derivo la $\frac{\partial z}{\partial y}$ considerando sempre la x costante;

miste:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \rightarrow$ derivo la $\frac{\partial z}{\partial x}$ considerando la x costante;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \rightarrow$ derivo la $\frac{\partial z}{\partial y}$ considerando la y costante;

N.B. $\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}$ devono essere uguali.

Esempio:

$$z = 3xy + x^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3y + 2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3$$

sono uguali

Massimi e minimi di una funzione di 2 variabili

Data una funzione z = f(x,y) definita in un insieme $D \subseteq \Re x \Re$, il punto $P_0(x_0, y_0)$ di *D* si dice:

- **punto di massimo relativo** se esiste un intorno di P_0, incluso in D, per cui valga: $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$;
- **punto di minimo relativo** se esiste un intorno di P_0, incluso in D, per cui valga: $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ **.**

Si parla invece di punto di **minimo assoluto** e di **massimo assoluto** se le relazioni precedenti sono vere $\forall (x, y) \in D$.

I punti di massimo e di minimo (assoluti o relativi) vengono detti **punti estremanti** della funzione. Essi si diranno **liberi** se si ottengono considerando che le variabili coinvolte non hanno legami tra loro e sono libere di assumere qualunque valore del dominio.

Un **massimo o minimo vincolato** per una funzione di due variabili è un massimo o minimo da ricercarsi non su tutto il dominio ma all'interno del sottoinsieme del dominio che soddisfa l'equazione del vincolo, quindi graficamente è il massimo o il minimo relativo della curva ottenuta dall'intersezione del dominio con la curva del vincolo di equazione g(*x*, *y*) = 0.

MASSIMI E MINIMI LIBERI DI UNA FUNZIONE DI 2 VARIABILI

<table>
<tr>
<td>

Metodo dell'Hessiano.

- Calcolo le derivate parziali prime;

- Si risolve il sistema: (<u>condizione necessaria</u>)

$$\begin{cases} z'_x(x, y) = 0 \\ z'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

e si trovano le coordinate dei punti critici o stazionari tra cui gli eventuali punti di MINIMO e MASSIMO

- Calcolo le derivate seconde;

- Si calcola l'hessiano: (<u>condizione sufficiente</u>)

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}$$

- Si sostituiscono le coordinate dei punti trovati nel risultato trovato e si classificano i punti critici:
  - Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $z''_{xx}(x_x, y_x) < 0$ si ha un massimo relativo.
  - Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $z''_{xx}(x_x, y_x) > 0$ si ha un minimo relativo.
  - Se $H(x_0, y_0) < 0$ si ha un punto di sella.
  - Se $H(x_0, y_0) = 0$ risulta un caso ambiguo e si esamina il comportamento della funzione nell'intorno di P_0 utilizzando altri metodi.

</td>
<td>

Esempio: $z = x^2 + y^2 - 2x$

- Calcolo le derivate parziali prime:

$$z'_x = 2x - 2; \qquad z'_y = 2y;$$

- Si risolve il sistema: (<u>condizione necessaria</u>)

$$\begin{cases} z'_x = 2x - 2 = 0 \\ z'_y = 2y = 0 \end{cases}$$

P(1, 0) punto critico

- Calcolo le derivate seconde;

$$z''_{xx} = 2 \qquad z''_{yy} = 2 \qquad z''_{xy} = z''_{yx} = 0$$

- Si calcola l'hessiano: (<u>condizione sufficiente</u>)

$$H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

- Classificazione dei punti critici:
  poiché $H > 0$ e $z''_{xx} > 0$ → P è punto di minimo

</td>
</tr>
</table>

MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE DI 2 VARIABILI CON VINCOLO ESPRESSO DA UNA EQUAZIONE

Sia data la funzione $z = f(x, y)$ con il vincolo $g(x,y) = 0$; **Metodo dell'esplicitazione.**	**Esempio:** $z = x^2 + y^2 \qquad x + 2y - 4 = 0$
▪ Si esplicita il vincolo rispetto ad una variabile;	▪ Esplicitiamo il vincolo rispetto a *x:* $x = 4 - 2y;$
▪ si sostituisce la variabile esplicitata nella funzione ottenendo, così, una funzione in una sola variabile;	▪ sostituiamo la x nella funzione ottenendo, così, una funzione in una sola variabile: $z = (4 - 2y)^2 + y^2$ cioè $z = 5y^2 - 16y + 16;$
▪ si individuano gli estremi con i metodi dell'analisi eseguendo la derivata prima e studiandone il segno.	▪ la condizione necessaria per la presenza di estremanti prevede che z' = 0, quindi: $z' = 10y - 16 = 0 \rightarrow y = 8/5$, $z' > 0$ per $y > 8/5$ perciò min .