CAPITOLO 6

Determinante e inversa di una matrice

Esercizio 6.1. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6.2. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6.3. *Calcolare il rango della seguente matrice A, utilizzando il calcolo del determinante.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k+2 & 0 \\ k^2-1 & 0 & 4-k \\ 1 & 2k-3 & 0 \end{bmatrix} \qquad k \in \mathbf{R}$$

Esercizio 6.4. *Calcolare l'inversa delle seguenti matrici (invertibili) utilizzando il metodo della riduzione a gradini.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6.5. *Dopo avere stabilito se le seguenti matrici sono invertibili calcolarne l'inversa:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6.6. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare il determinante di A e stabilire per quali valori di k la matrice è invertibile.*
b) *Trovare la matrice inversa di A per $k = 1$.*

Esercizio 6.7. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.*
b) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*

Esercizio 6.8. *Sia A_t la matrice reale*

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 2 & t & 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

Stabilire per quali valori di t la matrice A_t è invertibile.

Esercizio 6.9. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Esercizio 6.10. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4k & 4k-1 & k-2 \\ 0 & 1-4k & 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Esercizio 6.11. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A.*

Esercizio 6.12. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Si determini il valore di k tale per cui la matrice A abbia determinante uguale a uno. Per tale valore di k, si calcoli la matrice inversa di A.*

---

1. Suggerimenti

Una matrice (quadrata) A è invertibile se esiste una matrice, indicata con A^{-1}, tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice quadrata A sia invertibile è che sia $\det(A) \neq 0$.

Per calcolare l'inversa di una matrice utilizzeremo due metodi:

- Si affianca alla matrice A la matrice identica e si riduce A a gradini in forma normale (cioè con tutti 1 sulla diagonale e 0 altrove). La matrice in cui è stata trasformata la matrice identica è l'inversa A^{-1}.
- Si utilizzano le formule:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [a'_{ij}]^T$$

dove

$$\begin{aligned} a'_{ij} = & \text{ complemento algebrico di } a_{ij} \\ = & (-1)^{i+j} \cdot \det(\text{matrice ottenuta da } A \text{ eliminando la riga } i \text{ e la colonna } j) \end{aligned}$$

Rango.

Per calcolare il rango di una matrice possiamo utilizzare i sottodeterminanti oppure i pivot. Infatti valgono le seguenti proprietà:

(1) Il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice (quadrata) con determinante non nullo.
(2) Il rango di una matrice A corrisponde al numero dei suoi pivot, una volta che A è stata ridotta a gradini.
(3) Il rango di una matrice A è uguale al numero di righe linearmente indipendenti.
(4) Il rango di una matrice A è uguale al numero di colonne linearmente indipendenti.

Talvolta per calcolare il rango di una matrice può essere utile utilizzare un metodo misto di riduzione e di calcolo dei determinanti. Infatti, sia A una matrice e A' la matrice ottenuta da A con qualche passo di riduzione a gradini. Allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$. In particolare se A è quadrata $\det(A) = 0$ se e solo se $\det(A') = 0$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice quadrata A sia invertibile è che sia $\det(A) \neq 0$, ovvero che $\text{rg}(A)$ sia massimo.

---

2. Soluzioni

Esercizio 6.1. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = -4 - 3 = -7 \\ \det(B) &= 0 - 2 \cdot 3 = -6 \end{aligned}$$

Per calcolare il determinante di C sviluppiamo secondo la terza colonna:

$$\begin{aligned} \det(C) &= -2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= -2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-7) = 2 - 14 = -12 \end{aligned}$$

Analogamente per calcolare il determinante di D sviluppiamo secondo la terza colonna:

$$\det(D) = -2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = -2 \cdot (7) = -14$$

Per calcolare il determinante di F sviluppiamo rispetto alla prima riga. Notiamo che il determinante di F risulta il prodotto degli elementi della diagonale:

$$\det(F) = 7 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = 7 \cdot 1 \cdot (-3) = -21$$

□

Esercizio 6.2. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Soluzione:
Cominciamo dalle matrici 2×2:

$$\det(A_1) = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -5$$
$$\det(A_2) = 3 \cdot 1 = 3$$
$$\det(A_3) = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

Consideriamo ora le matrici 3×3.
Per la matrice A_4 sviluppiamo il determinante rispetto alla prima colonna:

$$\det(A_4) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (10) = 10$$

Per la matrice A_5 possiamo sviluppare il determinante indifferentemente rispetto alla prima colonna o alla prima riga:

$$\det(A_5) = -2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -6$$

Per la matrice A_6 ci conviene sviluppare il determinante rispetto alla seconda colonna:

$$\det(A_6) = -(-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = 1 \cdot (7-4) + 1 \cdot (7-6) = 3 + 1 = 4$$

□

Esercizio 6.3. *Calcolare il rango della seguente matrice A, utilizzando il calcolo del determinante.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k+2 & 0 \\ k^2-1 & 0 & 4-k \\ 1 & 2k-3 & 0 \end{bmatrix} \qquad k \in \mathbf{R}$$

Soluzione:
Per calcolare il rango di A utilizziamo la seguente proprietà.

Il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sottomatrice quadrata di A con deteminante non nullo.

Cominciamo quindi a calcolare il determinante di A per stabilire quando $\text{rg}(A) = 3$.
Sviluppiamo rispetto alla terza colonna:

$$\det(A) = -(4-k) \cdot [2k - 3 - (k+2)] = (k-4)(k-5)$$

Quindi $\det(A) = 0$ se $k = 4$ o $k = 5$.
Di conseguenza:

- Se $k \neq 4,\ 5$, la matrice ha determinante non nullo, quindi $\text{rg}(A) = 3$.
- Se $k = 4$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo già che $\text{rg}(A) \leq 2$. Per stabilire se ha rango 2 basta trovare una sottomatrice 2×2 con determinante non nullo. In effetti in A troviamo per esempio la sottomatrice:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(B) = -15 \cdot 6 \neq 0$$

quindi $\text{rg}(A) = 2$.

- Se $k=5$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo già che $\text{rg}(A) \leq 2$. Per stabilire se ha rango 2 basta trovare una sottomatrice 2×2 con determinante non nullo. In effetti in A troviamo per esempio la sottomatrice:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(C) = 7 \neq 0$$

quindi $\text{rg}(A) = 2$.

□

Esercizio 6.4. *Calcolare l'inversa delle matrici (invertibili)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

utilizzando il metodo della riduzione a gradini.

Soluzione:

- Consideriamo la matrice A e procediamo affiancando ad A la matrice identica 2×2 prima di calcolare $rref(A)$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-2I \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ -1/5II \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} I-2II \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Di conseguenza

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo la matrice B e procediamo affiancando a B la matrice identica 3×3 prima di calcolare $rref(B)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ III-2I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ 1/2II \\ III-II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 1/2III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} I-3III \\ II+1/2III \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} I+II \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Di conseguenza

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & 7 & -5 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che se $M \in M_{n \times n}$ è una matrice tale che $rref(M) = I_n$, allora $\text{rg}(M) = n$, quindi:
una matrice $n \times n$ è **invertibile** *se e solo se ha rango n.*

□

Esercizio 6.5. *Dopo avere stabilito se le seguenti matrici sono invertibili calcolarne l'inversa:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

- Poichè $\det(A_1) = -1 - 4 = -5$ la matrice A_1 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}2 = -2 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}2 = -2 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}1 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- Consideriamo A_2. Poichè $\det(A_2) = 3 \cdot 1 = 3 \neq 0$, la matrice A_2 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}1 = 1 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}0 = 0 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}0 = 0 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}3 = 3 \end{cases} \Rightarrow A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo A_3. Poichè $\det(A_3) = 3 - 2 = 1 \neq 0$, la matrice A_3 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1}3 = 3 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2}2 = -2 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1}1 = -1 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2}1 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_4) = 10 \neq 0$, la matrice A_4 è invertibile. Inoltre

$$\begin{cases} a'_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 10 \\ a'_{12} = (-1)^{1+2} = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{13} = (-1)^{1+3}1 = \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 20 \\ a'_{22} = (-1)^{2+2} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5 \\ a'_{23} = (-1)^{2+3} = \det \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 0 \\ a'_{32} = (-1)^{3+2} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 \\ a'_{33} = (-1)^{3+3} = \det \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \end{cases} \Rightarrow A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_5) = -6 \neq 0$, la matrice A_5 è invertibile. Inoltre

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = 3 & a'_{12} = 0 & a'_{13} = 0 \\ a'_{21} = 0 & a'_{22} = -6 & a'_{23} = 0 \\ a'_{31} = 0 & a'_{32} = 0 & a'_{33} = -2 \end{array}$$

Quindi

$$A_5^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \\ 0 & 1 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- Poichè $\det(A_6) = 4 \neq 0$, la matrice A_6 è invertibile. Inoltre

$$\begin{aligned} a'_{11} &= 7 & a'_{12} &= -3 & a'_{13} &= -2 \\ a'_{21} &= 7 & a'_{22} &= 1 & a'_{23} &= -2 \\ a'_{31} &= -5 & a'_{32} &= 1 & a'_{33} &= 2 \end{aligned}$$

Quindi

$$A_6^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 6.6. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare il determinante di A e stabilire per quali valori di k la matrice è invertibile.*
b) *Trovare la matrice inversa di A per $k = 1$.*

Soluzione:

a)

$$\det(A) = (1 - 4) + 2k = 2k - 3$$

La matrice A è invertibile se il suo determinante è diverso da zero, ovvero se $k \neq \frac{3}{2}$.

b) Calcoliamo l'inversa di A dopo avere posto $k = 1$, nel quale caso $\det(A) = 2 - 3 = -1$.

$$\begin{aligned} a'_{11} &= -3 & a'_{12} &= -1 & a'_{13} &= 2 \\ a'_{21} &= 2 & a'_{22} &= 1 & a'_{23} &= -2 \\ a'_{31} &= -1 & a'_{32} &= -1 & a'_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

In alternativa per calcolare l'inversa di A potevamo calcolare $rref(A)$ dopo avere affiancato a A, con $k = 1$, la matrice identica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} I + III \\ II + III \\ -III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 6.7. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) *Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.*
b) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*

Soluzione:

a) Una matrice quadrata è invertibile se ha determinante diverso da zero, ovvero se ha rango massimo. Calcoliamo quindi il determinante di A sviluppando rispetto alla seconda riga:

$$\det(A) = (2k-2) \cdot [k(2-k) - k] = (2k-2)(-k^2 + k)$$

Quindi $\det(A) = 0$ se

$$2k - 2 = 0 \ \Rightarrow \ k = 1$$
$$-k^2 + k = 0 \ \Rightarrow \ k = 0 \text{ o } k = 1$$

Infine A è invertibile se $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

Calcoliamo l'inversa di A quando $k = -1$ con il metodo della riduzione:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} -I \\ -1/4II \\ III+I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III+4II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} I-2II \\ \\ 1/2III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} I-III \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Abbiamo visto che se $k \neq 0, 1$ la matrice ha determinante non nullo, quindi in questi casi $\text{rg}(A) = 3$. Inoltre:
   – Se $k = 0$, A diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ 1/2II \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

   – Se $k = 1$, A diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$$

□

Esercizio 6.8. *Sia A_t la matrice reale*

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 2 & t & 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ reale}).$$

Stabilire per quali valori di t la matrice A_t é invertibile.

Soluzione:

A_t è invertibile se il suo determinante è diverso da zero, ovvero se il suo rango è 3. Riduciamo quindi A a gradini per stabilire se è invertibile.

$$\begin{array}{c} II \\ I \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t & 0 \\ 2 & t & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t & 0 \\ 0 & t-2 & 1-2t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-2 & 1-2t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Scambiando ora la seconda e terza colonna otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1-2t & t-2 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Quindi A_t ha rango 3, cioè A_t è invertibile, se $t \neq 0, \frac{1}{2}$.

In alternativa potevamo calcolare direttamente il determinante:

$$\det(A_t) = -t(1-2t)$$

e A_t è invertibile se $\det(A_t) \neq 0$, ovvero se $t \neq 0, \frac{1}{2}$.

□

Esercizio 6.9. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(t reale).}$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Soluzione:

a) Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II-3kI \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 0 & -k+1 \end{bmatrix}$$

Quindi:
- Se $k \neq \pm 1$, la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 3$.
- Se $k = 1$ o $k = -1$, la matrice ha 2 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 2$.

b) Una matrice quadrata è invertibile se ha rango massimo. In questo caso A è invertibile quando ha rango 3 cioè se $k \neq \pm 1$.

□

Esercizio 6.10. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4k & 4k-1 & k-2 \\ 0 & 1-4k & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(k reale).}$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Soluzione:

a) Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II+2kI \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4k-1 & 11k-2 \\ 0 & 1-4k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+II \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4k-1 & 11k-2 \\ 0 & 0 & 11k-2 \end{bmatrix}$$

Quindi:
- Se $k \neq \frac{1}{4}, \ \frac{2}{11}$, la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 3$.
- Se $k = \frac{1}{4}$ o $k = \frac{2}{11}$, la matrice ha 2 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 2$.

b) Una matrice quadrata è invertibile se ha rango massimo. In questo caso A è invertibile quando ha rango 3 cioè se $k \neq \frac{1}{4}, \ \frac{2}{11}$.

□

Esercizio 6.11. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(k reale).}$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il rango di A riducendola a gradini, ricordando che una matrice è invertibile se ha rango massimo (in questo caso 3):

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-2I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III+kII \end{array}\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & 0 & k(k-4) \end{bmatrix}$$

A ha tre pivot, e quindi rango 3, se $k(k-4) \neq 0$. Quindi A è invertibile se $k \neq 0, 4$.

b) Per determinare l'inversa di A calcoliamo $rref(A)$ dopo avere affiancato a A la matrice identica, tenendo conto delle condizioni $k \neq 0, 4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2I \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} I+III \\ \\ III+kII \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k-4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k(k-4) & -2 & k & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-\frac{1}{k}III \\ \frac{1}{k(k-4)}III \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{array}\right]$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{bmatrix} \qquad \forall k \neq 0, 4$$

□

Esercizio 6.12. *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Si determini il valore di k tale per cui la matrice A abbia determinante uguale a uno. Per tale valore di k, si calcoli la matrice inversa di A.*

Soluzione:

a) Ricordiamo che una matrice ha rango massimo, in questo caso 3, se ha determinante diverso da zero.

$$\det(A) = 2 \cdot 6k - 1 \cdot 6k = 6k$$

Quindi se $k \neq 0$ la matrice ha rango 3. Per $k = 0$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2II - I \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e per $k = 0$ la matrice ha rango 2.

b) Abbiamo visto che $\det(A) = 6k$, quindi A ha determinante 1 se $k = \dfrac{1}{6}$. Calcoliamo l'inversa con il metodo della riduzione:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & \frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ \\ 2III \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ II-I \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} I-1/12III \\ II+1/12III \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} I-II \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

□