Capitolo I
LE FUNZIONI A DUE VARIABILI

In questo primo capitolo introduciamo alcune definizioni di base delle funzioni reali a due variabili reali. Nel seguito R denoterà l'insieme dei numeri reali mentre R x R l'insieme delle coppie ordinate (x, y).

Definizione 1.1 (di funzione a due variabili)

Sia $D \subseteq \Re x \Re$. Si chiama funzione reale di due variabili reali x e y una relazione che associa ad ogni coppia ordinata di numeri reali $(x, y) \in D$ uno ed un solo numero reale z. In simboli:

$$f : D \rightarrow \Re$$

$$(x, y) \rightarrow z = f(x, y) \qquad (1)$$

x e y si dicono variabili indipendenti, z si dice variabile dipendente. Come per le funzioni reali di variabile reale si avrà:

- $D \subseteq \Re x \Re$ prende il nome di dominio della funzione
- $\Re$ prende il nome di codominio della funzione.

Per definire una funzione di due variabili bisogna che il dominio della stessa sia esplicitato in modo da poter definire in modo esatto la funzione stessa. Tuttavia, accade spesso che venga assegnata una formula matematica $z = f(x, y)$ senza precisare quale sia il dominio. In questo caso possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 1.2 (di dominio)

Il *campo di esistenza* o *dominio* di una funzione $z = f(x, y)$ è il più ampio sottoinsieme $D \subseteq \Re x \Re$, costituito da tutti e soli i valori che possono essere attribuiti alle variabili indipendenti x e y affinché la legge che definisce la funzione abbia senso (valori per i quali, cioè, è possibile calcolare il corrispondente valore di z).

Esempi

1. $f(x, y) = \sqrt{x} + y$

   è possibile calcolare il valore di questa funzione solo quando è definita la radice, il che accade quando il radicando è non negativo ($x \geq 0$). Il dominio sarà pertanto costituito dai punti (x, y) con ascissa non negativa, cioè dai punti del primo e del quarto quadrante, compreso l'asse y.

2. $f(x, y) = x + y - 2$

   è possibile calcolare il valore di questa funzione per qualunque punto del piano. Il dominio sarà, pertanto, l'intero piano cartesiano.

Per determinare il dominio di una funzione reale di due variabili reali, come nel caso delle funzioni di una sola variabile, dobbiamo tenere presenti le principali regole di esistenza.

Tipo di funzione		**Condizioni di esistenza**
Funzione razionale intera		Esiste per qualunque coppia ordinata $(x, y) \in R \times R$
Funzione razionale fratta	$z = \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$	Esiste se il denominatore è diverso da zero: $g(x, y) \neq 0$
Funzione irrazionale (con indice della radice $n \in N$ pari)	$z = \sqrt[n]{f(x, y)}$	Esiste se il suo radicando è positivo o nullo: $f(x, y) \geq 0$
Funzione irrazionale (con indice della radice $n \in N$ dispari)	$z = \sqrt[n]{f(x, y)}$	Esiste per qualunque $(x, y) \in R \times R$
Funzione logaritmica	$z=\log(f(x,y))$	Esiste se il suo argomento è positivo: $f(x, y) > 0$

Esempi

1. Consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x}$$

Essendo una funzione irrazionale con indice pari (n=2), essa esiste se il suo radicando è positivo, cioè:

$$x^2 + y^2 - 2x \geq 0$$

Quindi:

$$D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$$

Dal punto di vista grafico il dominio della funzione è rappresentato dai punti esterni alla circonferenza avente centro nel punto (1, 0) e raggio 1 e dai punti della circonferenza stessa (Figura I.1).

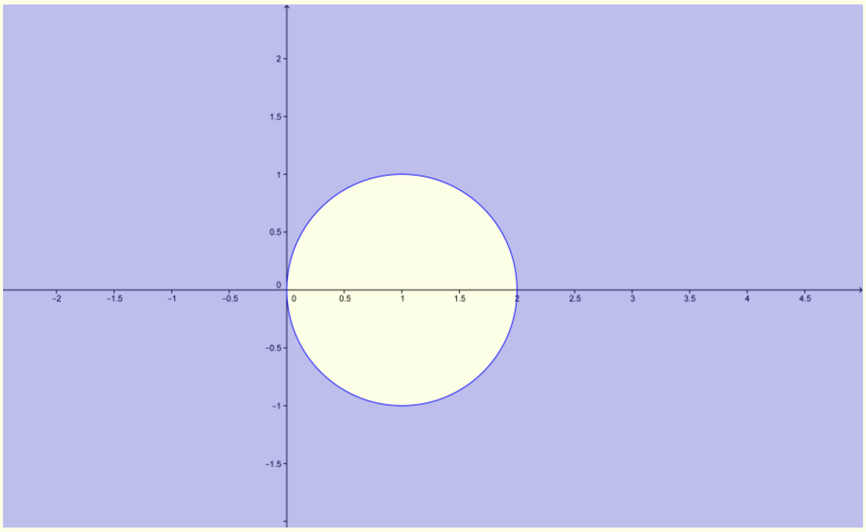


Figura I.1 Dominio della funzione $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-2x}$

2. Consideriamo la funzione:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2-y}+\sqrt{x}$$

Essendo la somma di due radici con indice pari (n=2), essa esiste se i radicandi delle due radici sono positivi o nulli, cioè:

$$\begin{cases} x^2-y\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$D=\{(x,y)\in R^2 \mid y\leq x^2 \wedge x\geq 0\}$$

Dal punto di vista grafico il dominio della funzione è rappresentato dall'intersezione del semipiano non nullo delle ascisse con la regione che si trova "al di sotto" della linea definita dalla parabola di equazione $y = x^2$ (Figura I.2) perché:

- $x\geq 0$ indica il 1° e 4° quadrante, compreso $x = 0$ (asse y);

- $y \le x^2$ è il semipiano esterno alla parabola perché sostituendo in essa il punto P(0;1) si ottiene 1 < 0 che è falso e quindi punti esterni.

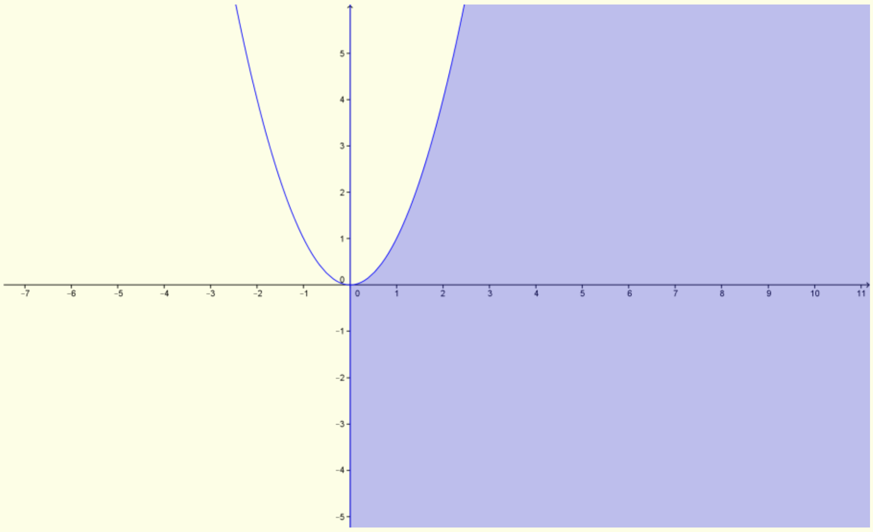


Figura I.2 Dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x}$

3. Consideriamo la funzione:

$$f(x,y) = \ln(x - 2y + 3)$$

Essendo una funzione logaritmica, essa esiste se il suo argomento è positivo, cioè:

$$x - 2y + 3 > 0$$

Quindi:

$$D = \left\{ (x,y) \in R^2 \mid y < \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right\}$$

Dal punto di vista grafico il dominio della funzione è rappresentato in Figura I.3.

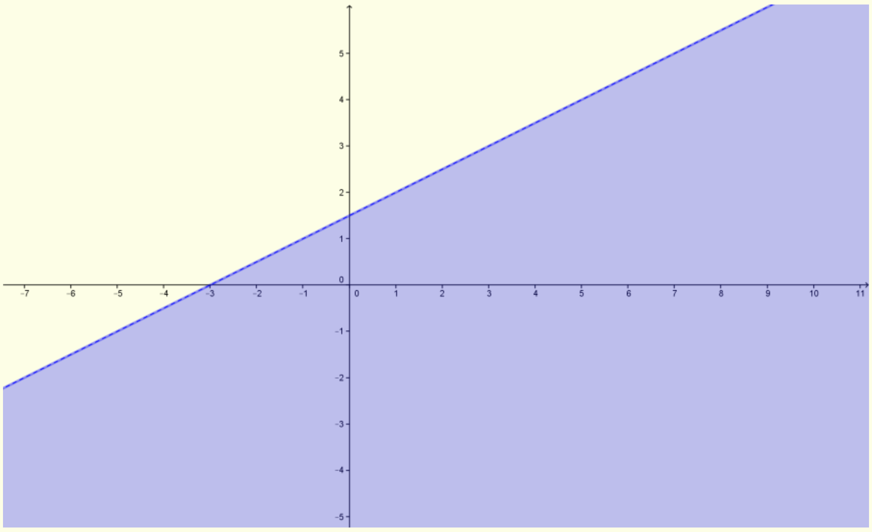


Figura I.3 Dominio della funzione $f(x,y) = \ln(x - 2y + 3)$

Da questi semplici esempi si evince che per calcolare il dominio di una funzione di due variabili è necessario saper operare con le disequazioni e i sistemi di disequazioni in due variabili.

Definizione 1.3 (di codominio)

Il *codominio* di una funzione $z = f(x, y)$ è l'insieme dei valori della variabile z, ed è un sottoinsieme di R.

I grafici delle funzioni di due variabili e le curve di livello

Essendo il dominio delle funzioni di due variabili un sottoinsieme del piano $\Re^2$ il grafico di tali funzioni sarà dato da una superficie nello spazio. Ad esempio il grafico della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ è quello rappresentato nella figura I.4.

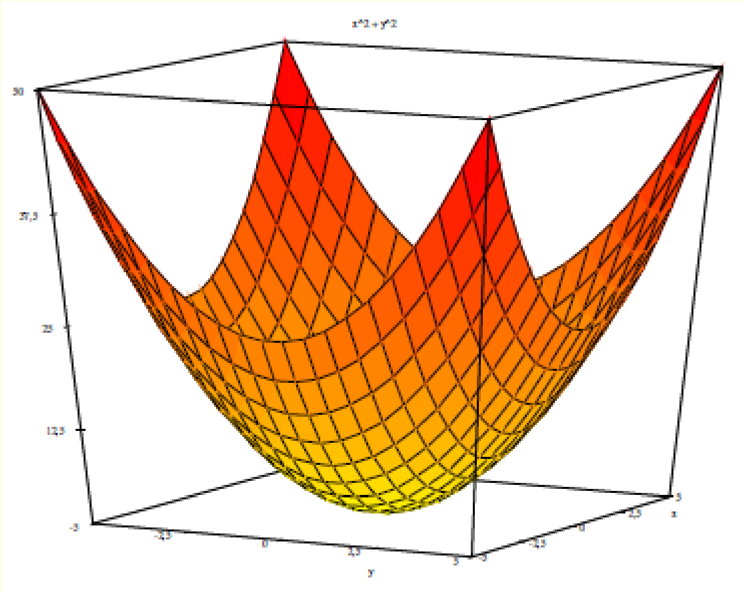


Figura I.4 Grafico della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$

La rappresentazione grafica delle funzioni di due variabili è quindi abbastanza complicata e può essere effettuata solamente con l'uso degli strumenti informatici, perciò per uno studio di tali funzioni si preferisce fare riferimento alle curve di livello. Diamo la seguente:

Definizione 1.4 (di curva di livello)

Sia data una funzione di due variabili z = f(x, y) e un piano z = k con $k \in \Re$ parallelo al piano xy. Prende il nome di curva di livello di quota k l'intersezione della funzione z = f(x, y) con il piano z = k.

Per trovare le curve di livello di una funzione di due variabili dobbiamo considerare il sistema:

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = k \end{cases}$$

dal quale si ottiene

$$f(x, y) = k$$

e quindi al variare di $k \in \Re$ possiamo ottenere infinite curve di livello che ci forniscono una buona descrizione della funzione considerata.

Esempio

Trovare le curve di livello della funzione $f(x, y) = y - x^2 - 1$.

Il grafico della funzione è rappresentato in figura I.5:

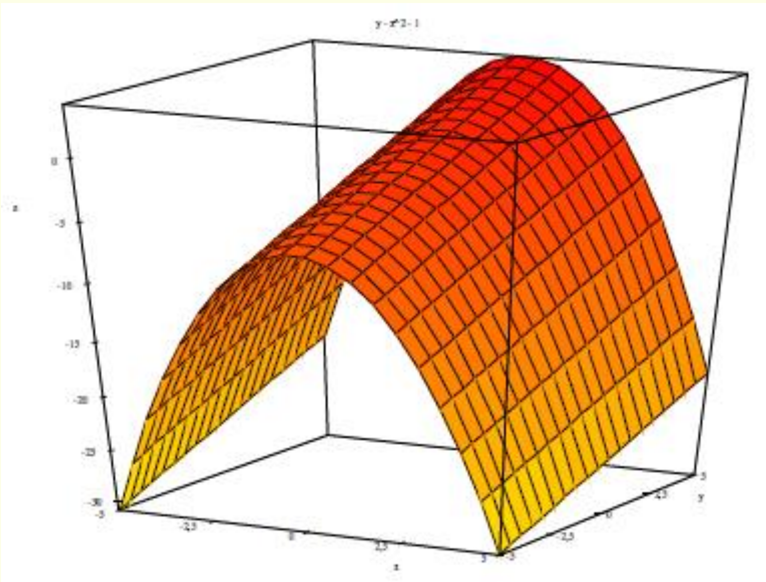


Figura I.5 Grafico della funzione $f(x, y) = y - x^2 - 1$

Costruiamo il sistema:

$$\begin{cases} z = y - x^2 - 1 \\ z = k \end{cases}$$

Dal quale otteniamo l'equazione in due variabili:

$$k = y - x^2 - 1$$

equivalente a:

$$y = x^2 + 1 + k$$

Per la costruzione delle curve di livello dobbiamo allora attribuire a k i valori 1, 2, 3, 4, 5 ottenendo 5 parabole. Il grafico di tali parabole e quindi delle corrispondenti curve di livello è quello evidenziato nella figura I.6.

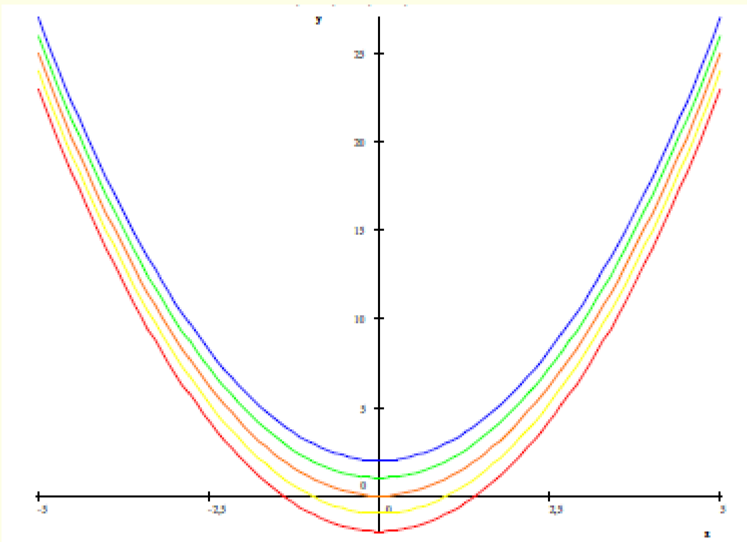


Figura I.6 Curve di livello della funzione f(x, y) = y – x^2 – 1

Capitolo II

LE DISEQUAZIONI E I SISTEMI DI DISEQUAZIONI IN DUE VARIABILI

Le disequazioni di 1° e 2° grado in due variabili si risolvono prevalentemente con la tecnica grafica in quanto non esistono metodi analitici semplici per scriverne le soluzioni, per cui di solito l'insieme di soluzioni viene graficamente rappresentato nel piano cartesiano. In questa breve introduzione tratteremo solo le disequazioni di primo e secondo grado e semplici sistemi.

Disequazioni lineari

Definizione 2.1 (di disequazione lineare in due variabili)

Una disequazione lineare in due variabili è una disequazione che, scritta in forma normale, si presenta come segue:

$$ax + by + c \geq 0 \quad \text{oppure} \quad ax + by + c > 0 \qquad (2)$$

$$(ax + by + c \leq 0 \quad \text{oppure} \quad ax + by + c < 0)$$

e rappresenta un semipiano individuato dalla retta r (o di bordo r) di equazione $ax + by + c = 0$ e formato da tutti e solo i punti che con le loro coordinate verificano la disequazione (2).

Nel caso in cui la disuguaglianza è del tipo ”≥ o ≤”, anche <u>i punti sulla retta fanno parte della soluzione e la retta</u>, detta *frontiera*, <u>viene rappresentata con una linea continua</u>. Negli altri casi (disuguaglianza è del tipo ”> o <”) <u>la retta non fa parte dell’insieme delle soluzioni e viene rappresentata con una linea tratteggiata</u>.

Per risolvere la disequazione di primo grado in due incognite (2) si procede in questo modo:

- si costruisce il grafico della retta $ax + by + c = 0$ che divide il piano in due regioni dette semipiani;
- si sceglie, a piacere, un punto $P(x_0, y_0)$ non appartenente alla retta detto "*punto di prova*" in uno qualsiasi di tali semipiani e si verifica se le sue coordinate soddisfano o meno la disequazione data:
  - se $ax_0 + by_0 + c \geq 0$ <u>è vera</u> allora <u>il semipiano sarà quello che contiene il punto di prova</u>;
  - se $ax_0 + by_0 + c \geq 0$ <u>è falsa</u> allora <u>il semipiano sarà quello opposto</u>.

Esempio

Consideriamo la disequazione:

$$3x < 6 + y$$

Riscriviamola esplicitando la y in funzione della x:

$$y > 3x - 6 \qquad (*)$$

Consideriamo la retta

$$y = 3x - 6$$

Essa divide il piano in due regioni:

- da una parte avremo i punti $P(x, y)$ per i quali vale $y < 3x - 6$;
- dall'altra tutti quei punti per i quali vale $y > 3x - 6$.

Sulla retta avremo tutti quei punti per cui vale $y = 3x - 6$. Si ottiene la seguente rappresentazione grafica:

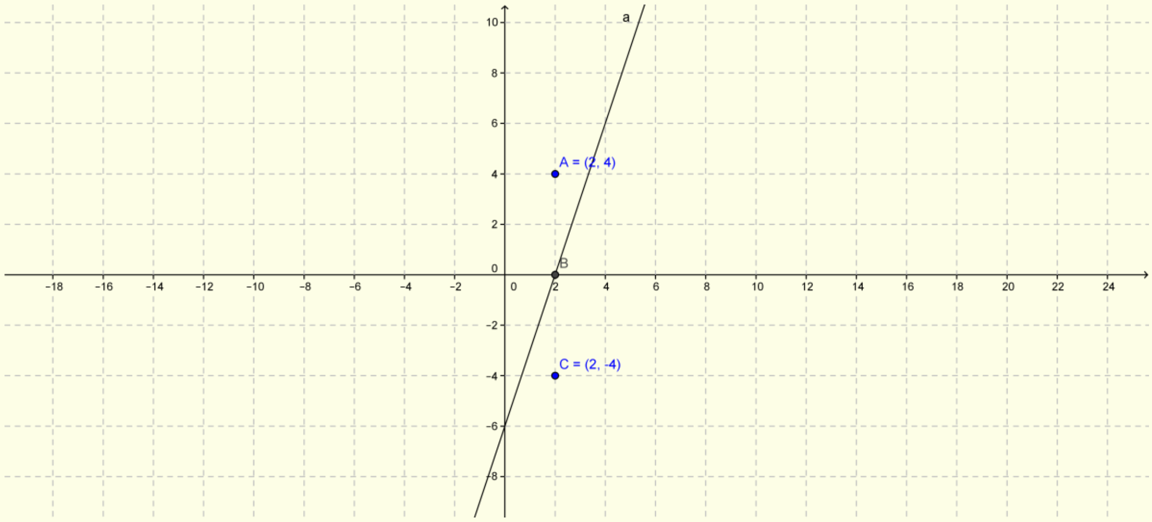


Figura II.1 Grafico della retta y = 3x- 6

Scegliendo dei punti del piano (mantenendo fissa la x), è facile dedurre in quale metà del piano vale la (*). Infatti:

- punto A(2,4), sostituendo le coordinate nella (2) si ottiene: 4 > 3·2- 6, cioè 4 > 0 che è vera;
- il punto B(2, 0) è un punto della retta;
- punto C(2, -4), sostituendo le coordinate nella (*) si ottiene: -4 > 3·2- 6, cioè -4 > 0 che è falsa.

Quindi, il semipiano che soddisfa la disequazione è quello che contiene il punto A, ossia il semipiano che sta al di sopra della retta esclusa la retta stessa.

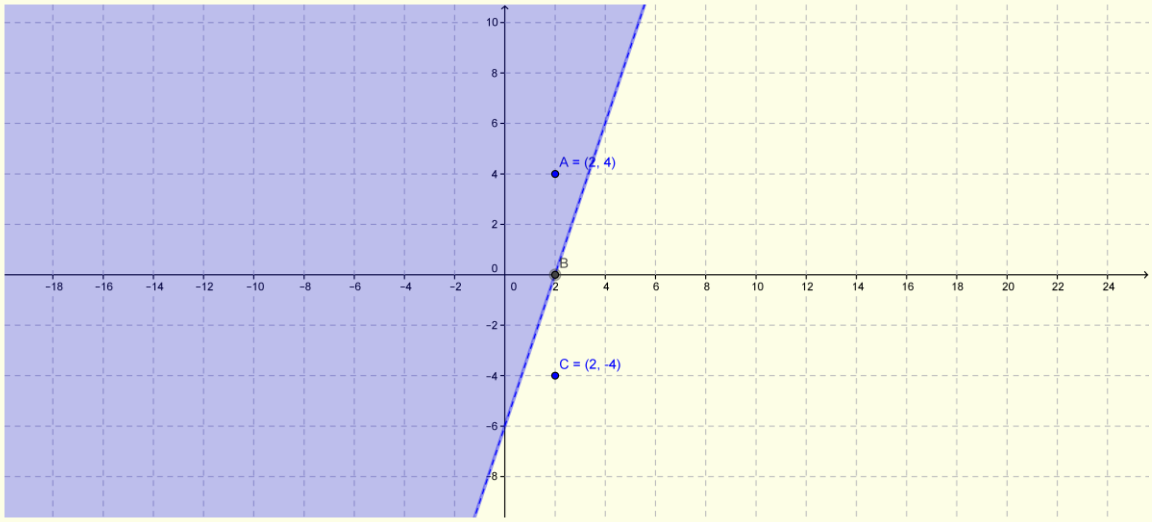


Figura II.2 Soluzione della disequazione 3x < 6 + y

Casi particolari 1:

Se $a = 0$ e $b \neq 0$ la disequazione viene espressa da una delle seguenti forme:

$$y > q; \qquad y \geq q; \qquad y < q; \qquad y \leq q$$

Consideriamo i seguenti esempi tenendo conto che la retta

$$y = q$$

è parallela all'asse *x*.

Esempi

La disequazione

$$y > 3$$

è verificata da tutti i punti del piano di ordinata maggiore di 3, ovvero da tutti i punti del semipiano che si trova "sopra" la retta *r* di equazione $y = 3$, esclusi i punti della retta r (deve essere $y > 3$ e non $y \geq 3$ quindi y non può essere uguale a 3. La linea tratteggiata in Figura II.3 indica che sono esclusi i punti della retta).

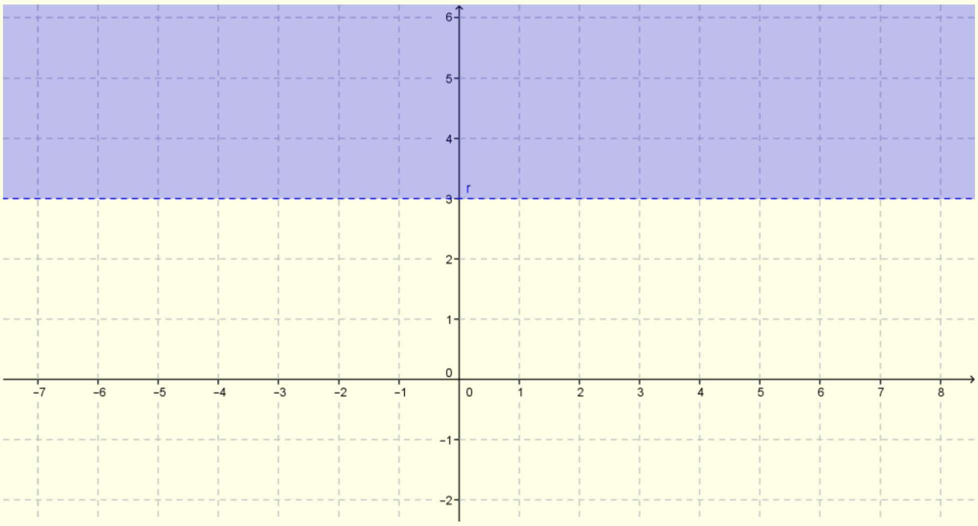


Figura II.3 soluzione della disequazione y > 3

La disequazione

$$y \geq 2$$

è verificata da tutti i punti del piano di ordinata maggiore o uguale a 2, ovvero da tutti i punti del semipiano che si trova"sopra" la retta r di equazione y = 2, compresi i punti della retta (deve essere y ≥ 2 quindi y può anche essere uguale a 2. La retta r di equazione y = 2 non è tratteggiata perché sono compresi i punti della retta).

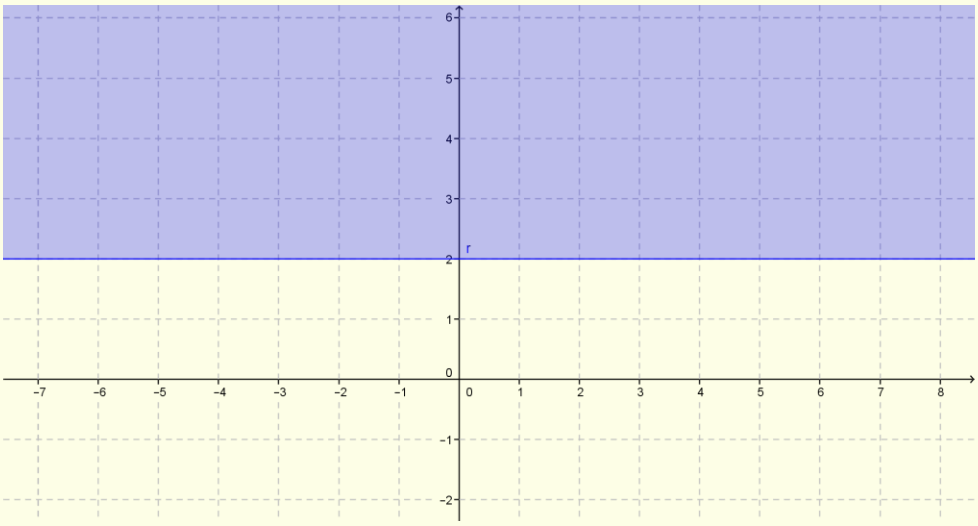


Figura II.4 Soluzione della disequazione y ≥ 2

La disequazione

$$y < 1$$

è verificata da tutti i punti del piano di ordinata minore di 1, ovvero da tutti i punti del semipiano che si trova "sotto" la retta *r* di equazione y = 1 esclusi i punti della retta *r*.

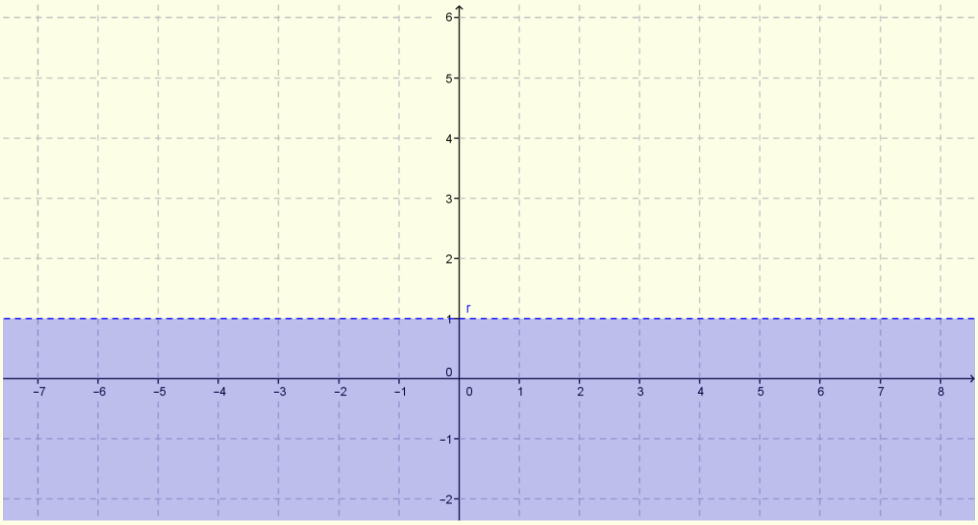


Figura II.5 Soluzione della disequazione y < 1

La disequazione

$$y \leq -3$$

è verificata da tutti i punti del semipiano di ordinata minore o uguale a –3 ovvero da tutti i punti del semipiano che si trova “sotto” la retta *r* di equazione y = -3, compresi i punti della retta *r*.

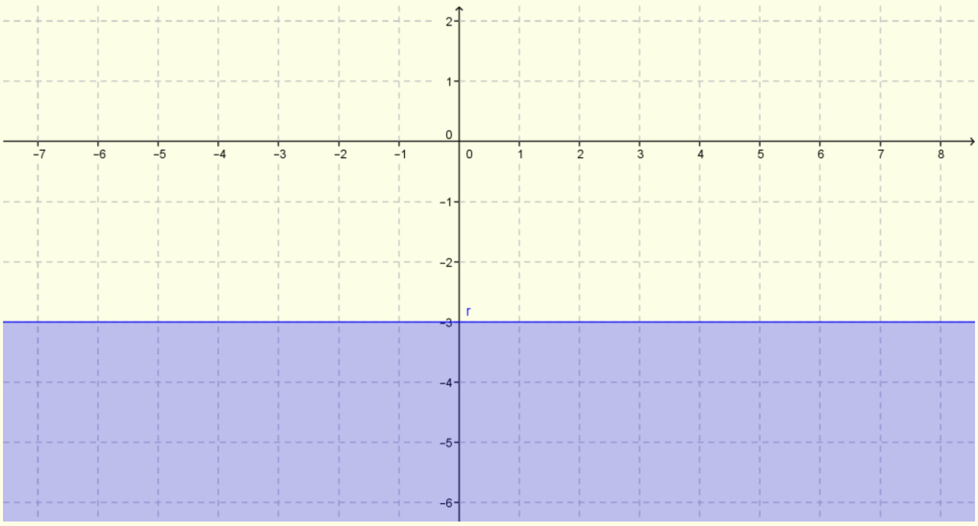


Figura II.6 Soluzione della disequazione $y \leq -3$

Casi particolari 2:

Se $a \neq 0$ e $b = 0$ la disequazione viene espressa da una delle seguenti forme:

$$x > p; \quad x \geq p; \quad x < p; \quad x \leq p$$

Analogamente al caso precedente si considera qualche esempio tenendo conto che la retta $x = p$ è parallela all’asse *y*.

Esempi

La disequazione

$$x > 2$$

è verificata da tutti i punti del piano di ascissa maggiore di 2, ovvero dai punti del semipiano "a destra" della retta *r* di equazione $x = 2$, esclusi i punti della retta (perché deve essere $x > 2$ e non $x \geq 2$)

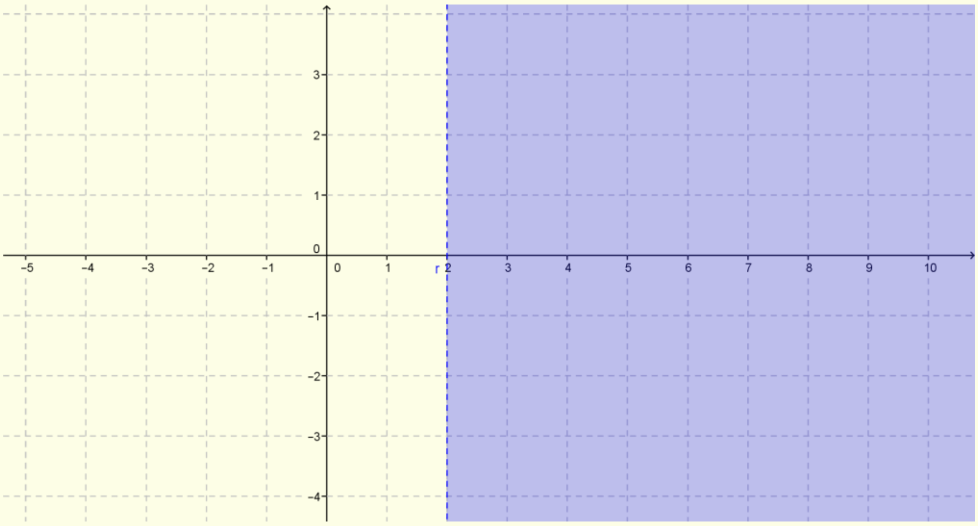


Figura II.7 Soluzione della disequazione x > 2

La disequazione

$$x \leq 4$$

è verificata da tutti i punti del piano di ascissa minore o uguale a 4, ovvero da tutti i punti del semipiano "a sinistra" della retta *r* di equazione $x = 4$, compresi i punti della retta.

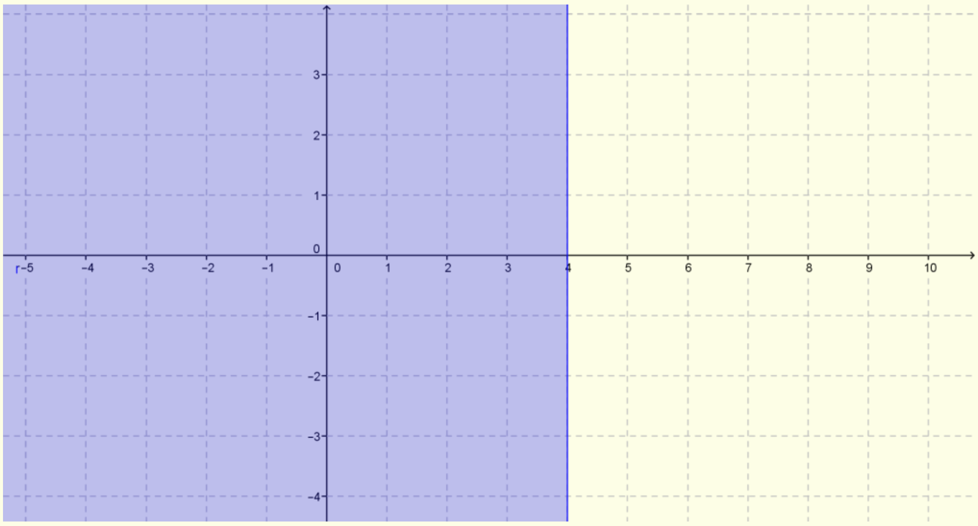


Figura II.8 Soluzione della disequazione $x \leq 4$

Sistemi di disequazioni lineari in due variabili

Definizione 2.1 (di sistema di disequazioni lineari in due variabili)

Un sistema di disequazioni lineari in due variabili è un insieme di due o più disequazioni lineari in due variabili racchiuse da una parentesi graffa la cui soluzione è l'insieme dei punti che soddisfano contemporaneamente tutte le disequazioni: quindi, è data dall'intersezione dei semipiani soluzione delle singole disequazioni che lo compongono.

Per risolvere un **sistema** di disequazioni bisogna:

- risolvere le singole disequazioni che lo compongono
- rappresentare le soluzioni nello stesso piano cartesiano
- determinare le intersezioni delle soluzioni delle singole disequazioni.

Esempio

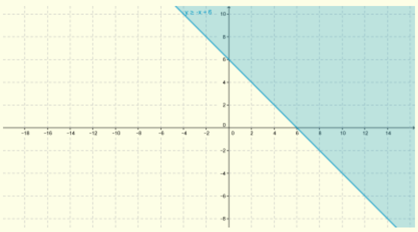
Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$$

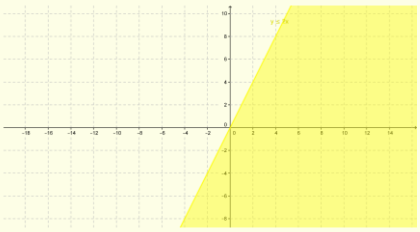
Lo trasformiamo nel sistema equivalente qui sotto indicato per procedere alla rappresentazione grafica:

$$\begin{cases} y \geq 6 - x \\ y \leq 2x \end{cases}$$

Si rappresentano le due disequazioni sul piano cartesiano.

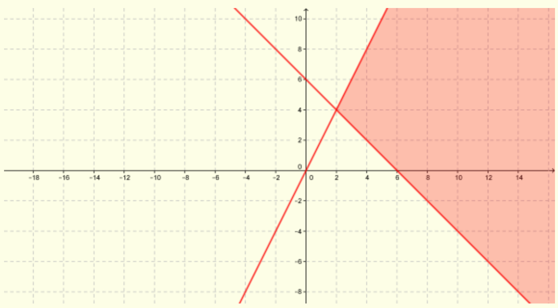


Soluzione disequazione y ≥ 6 - x



Soluzione disequazione y ≤ 2x

La soluzione del sistema è data dalla regione in comune ai due semipiani soluzioni delle singole disequazioni, perché i punti (x, y) che sono soluzione del sistema devono risolvere sia la prima che la seconda disequazione contemporaneamente.



Soluzione del sistema

Disequazioni non lineari in due variabili

Il metodo per risolvere le **disequazioni non lineari** è simile a quello per le disequazioni lineari. La differenza rilevante è che le funzioni da disegnare non sono più rette, ma curve di secondo grado (noi studieremo solo parabole e circonferenze)

L'insieme soluzione di una disequazione di 2° grado in due incognite, nel piano cartesiano è rappresentato da una delle due parti nelle quali la conica associata alla disequazione considerata divide il piano stesso.

Esempio

Risolvere la disequazione

$$\mathbf{x^2 - 6x + 5 - y \ \geq 0} \qquad (*)$$

Si rappresenta la curva di equazione

$$x^2 - 6x + 5 - y = 0$$

ovvero la curva di equazione

$$\mathbf{y = x^2 - 6x + 5}$$

che è l'equazione di una parabola che volge la concavità verso l'alto, ha il vertice nel punto V(3; - 4) ed interseca l'asse x nei punti A(1; 0) e B(5; 0) e l'asse y nel punto C(0; 5).

Essa divide il piano **in due parti** una delle quali contiene l'origine (dato che la parabola non passa per l'origine).

Una di queste due parti è costituita dai punti le cui coordinate (x; y) soddisfano la disequazione.

Consideriamo il punto O (0; 0) come "punto di prova" e sostituiamo le sue coordinate nella disequazione (*) si ha:

$$0 - 6*0 + 5 - 0 \ > 0\ ;$$

quindi verifica la disequazione.

Si conclude dicendo che:

L'insieme delle soluzioni della disequazione è rappresentato da una delle due parti in cui la parabola divide il piano, ed esattamente dalla parte contenente l'origine (la parte di piano colorata nella figura II.9).

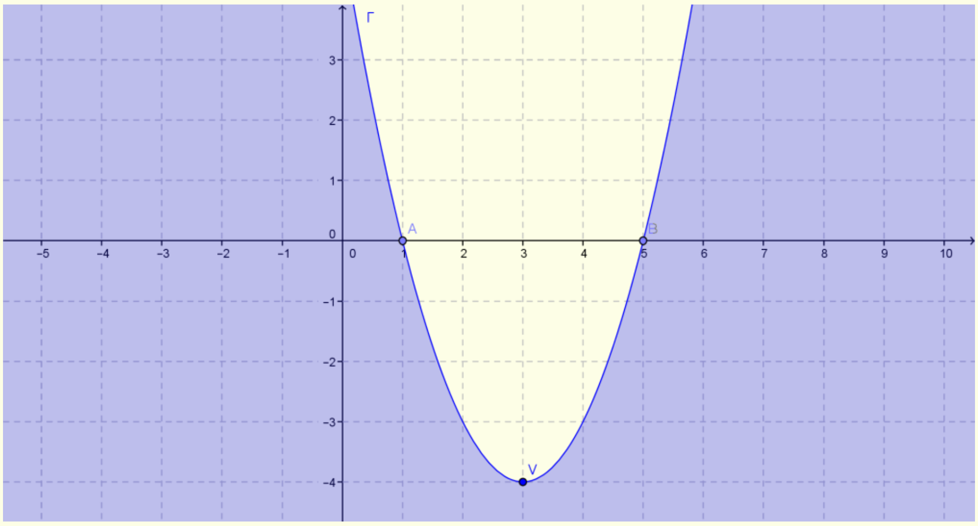


Figura II.9 Soluzione della disequazione $x^2 - 6x + 5 - y \ \geq 0$