*y* = *f*(*x*) crescente in *x*0: (concetto locale/puntuale)

per *h*"abbastanza piccolo"

*h* > 0 ⇒ *f*(*x*0+*h*) > *f*(*x*0)

*h* < 0 ⇒ *f*(*x*0+*h*) < *f*(*x*0)

(esiste un intorno di *x*0 entro il quale accade che prima di *x*0 la funzione valga meno di *f*(*x*0), e dopo di più)

*f'*(*x*0) > 0 ⇒ *f*(*x*) crescente in *x*0

*f'*(*x*0) < 0 ⇒ *f*(*x*) decrescente in *x*0

*f'*(*x*0) = 0 ⇒ *x*0  punto stazionario(a tangente orizzontale)

però:

*f*(*x*) crescente in *x*0 ⇒ *f'*(*x*0) ≥ 0

*f*(*x*) decrescente in *x*0 ⇒ *f'*(*x*0) ≤ 0

*f*(*x*0 + *h*) ≈ *f*(*x*0) + *f'*(*x*0)*h*

se *f'*(*x*0) > 0: *h* < 0 ⇒ *f*(*x*0 + *h*) ≈ *f*(*x*0) + *f'*(*x*0)*h* < *f*(*x*0)

*h* > 0 ⇒ *f*(*x*0 + *h*) ≈ *f*(*x*0) + *f'*(*x*0)*h* > *f*(*x*0)

(anche dal teor. della permanenza del segno:

lim > 0 ⇒ funz. (localmente) > 0:   > 0)

*x*0 pto di max relativo proprio: ∃ *I*(*x*0) | *x*∈*I*(*x*0)∩*I* ⇒ *f*(*x*) < *f*(*x*0)

(esiste un suo intorno entro il quale la *f* vale meno di *f*(*x*0))

(assoluto: *I*(*x*0) = *I* *x*∈*I* ⇒ *f*(*x*) < *f*(*x*0))

(improprio: *f*(*x*) ≤ *f*(*x*0))

(pto di estremo: di max o di min)



**se si è all'interno**, in un pto di estremo vi è un cambio di andamento (per i max: da crescente, a decrescente) dunque, un cambio di segno della derivata: ma per cambiare di segno, questa deve annullarsi

*x*0 max o min ⇒ *f'*(*x*0) = 0

*f'*(*x*0) = 0 ⇒ ?

*f*(*x*0 + *h*) ≈ *f*(*x*0) + *f'*(*x*0)*h* + (1/2)*f"*(*x*0)*h*2 = *f*(*x*0) + (1/2)*f"*(*x*0)*h*2 (*h* "piccolo")

*f*(*x*0 + *h*) − *f*(*x*0) ≈ (1/2)*f"*(*x*0)*h*2

poiché *h*2 è sempre positivo, quella differenza ha lo stesso segno prima e dopo di *x*0

*f"*(*x*0) > 0 ⇒ *f*(*x*0 + *h*) > *f*(*x*0) per ogni *h x*0 min

*f"*(*x*0) < 0 ⇒ *f*(*x*0 + *h*) < *f*(*x*0) per ogni *h x*0 max

*f'*(*x*0) = *f"*(*x*0) = 0 ⇒ ?

*f*(*x*0 + *h*) ≈ *f*(*x*0) + (1/3!)*f"'*(*x*0)*h*3

*f*(*x*0 + *h*) − *f*(*x*0) ≈ (1/3!)*f"'*(*x*0)*h*3 la differenza cambia segno col segno di *h*

qualunque sia il segno di *f"'*(*x*0), *f*(*x*0 + *h*) risulta maggiore o minore di *f*(*x*0) a seconda del segno di *h*: dunque, il pto non è di estremo

se *f'*(*x*0) = 0, *f"*(*x*0) > 0 *x*0 è di min

se *f'*(*x*0) = 0, *f"*(*x*0) < 0 *x*0 è di max

se *f'*(*x*0) = *f"*(*x*0) = 0, *f"'*(*x*0) ≠ 0 il pto non è di estremo

*f'*(*x*0) = *f"*(*x*0) = *f"'*(*x*0) = 0 ⇒ ?

*f*(*x*0 + *h*) − *f*(*x*0) ≈ (1/4!)*f*(IV)(*x*0)*h*4

poiché *h*4 è sempre positivo, quella differenza ha lo stesso segno prima e dopo di *x*0

*f*(IV)(*x*0) > 0 ⇒ *f*(*x*0 + *h*) > *f*(*x*0) per ogni *h x*0 min

*f*(IV)(*x*0) < 0 ⇒ *f*(*x*0 + *h*) < *f*(*x*0) per ogni *h x*0 max

*h* compare con esponente pari: la deduzione non dipende dal suo segno (si ragiona come sopra)

…..

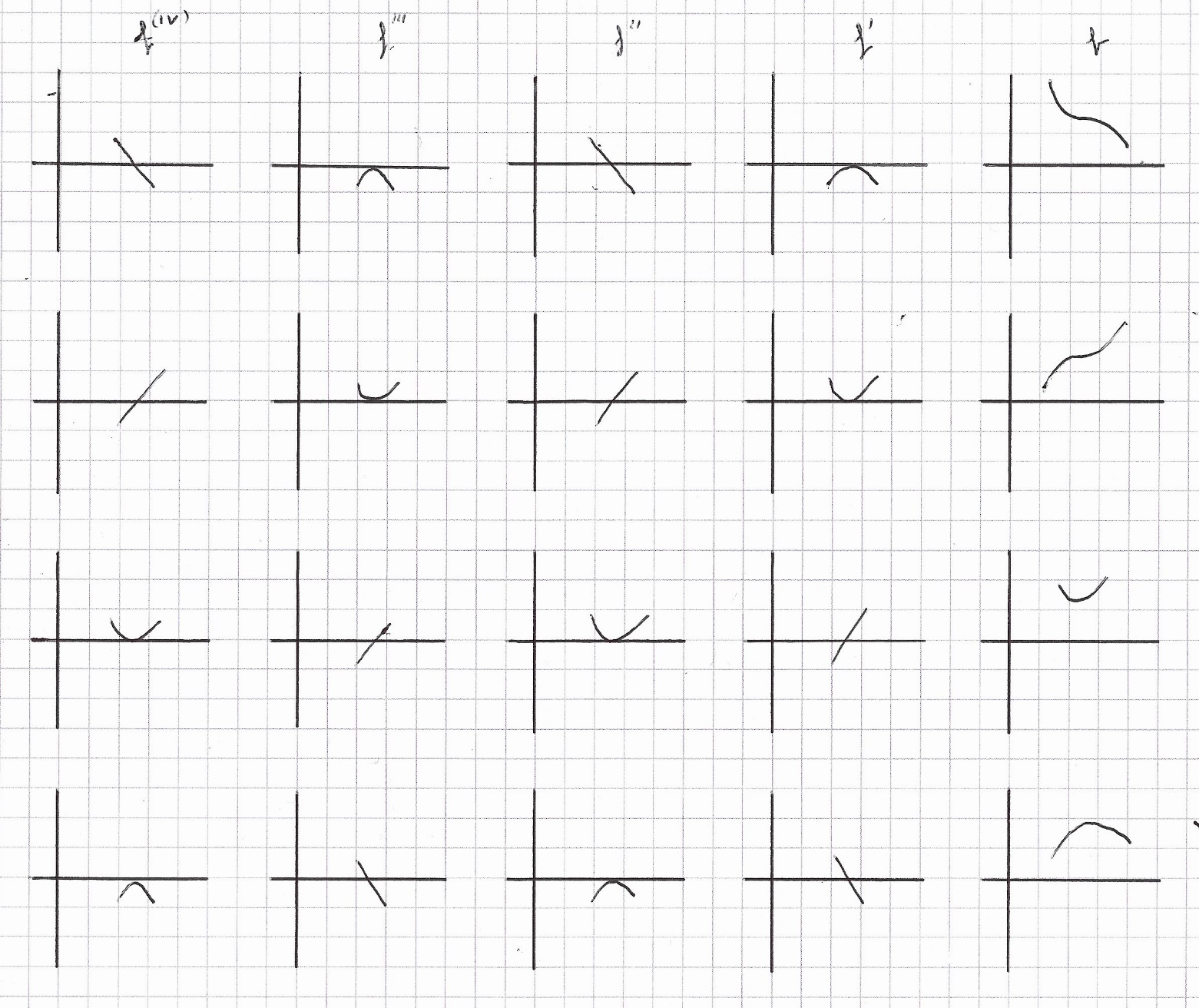
*f'*(*x*0) = *f"*(*x*0) = … = *f*(*k*−1)(*x*0) = 0, *f*(*k*)(*x*0) ≠ 0

*k* pari: *f*(*k*)(*x*0) > 0 min, *f*(*k*)(*x*0) < 0 max

*k* dispari: né max né min

si ragiona anche così:

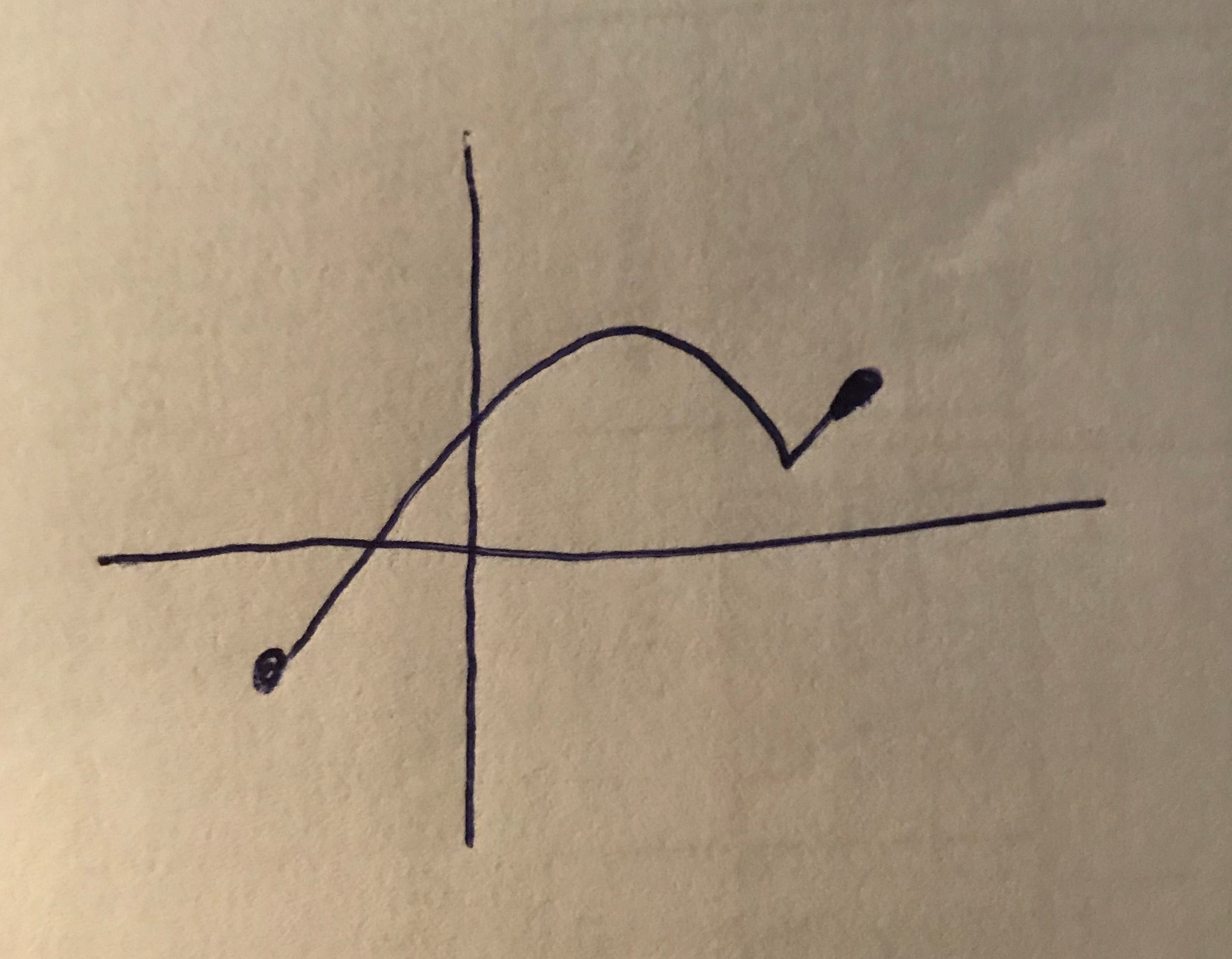
*f*(IV)(*x*0) = 0: andamento locale di *f*(IV)(*x*) *f*(V)(*x*0) > 0



attenzione:

- ai punti di non derivabilità

- ai punti di frontiera (se si parte in salita, c'è un min! …)



come il segno di *f'* informa sull'andamento di *f*,

quello di *f''* informa sull'andamento di *f'*

e dunque sul verso della concavità di *f*

*f"*(*x*0) > 0 ⇒ *f'* cresc. in *x*0⇒ *x*0 pto di concavità verso l'alto

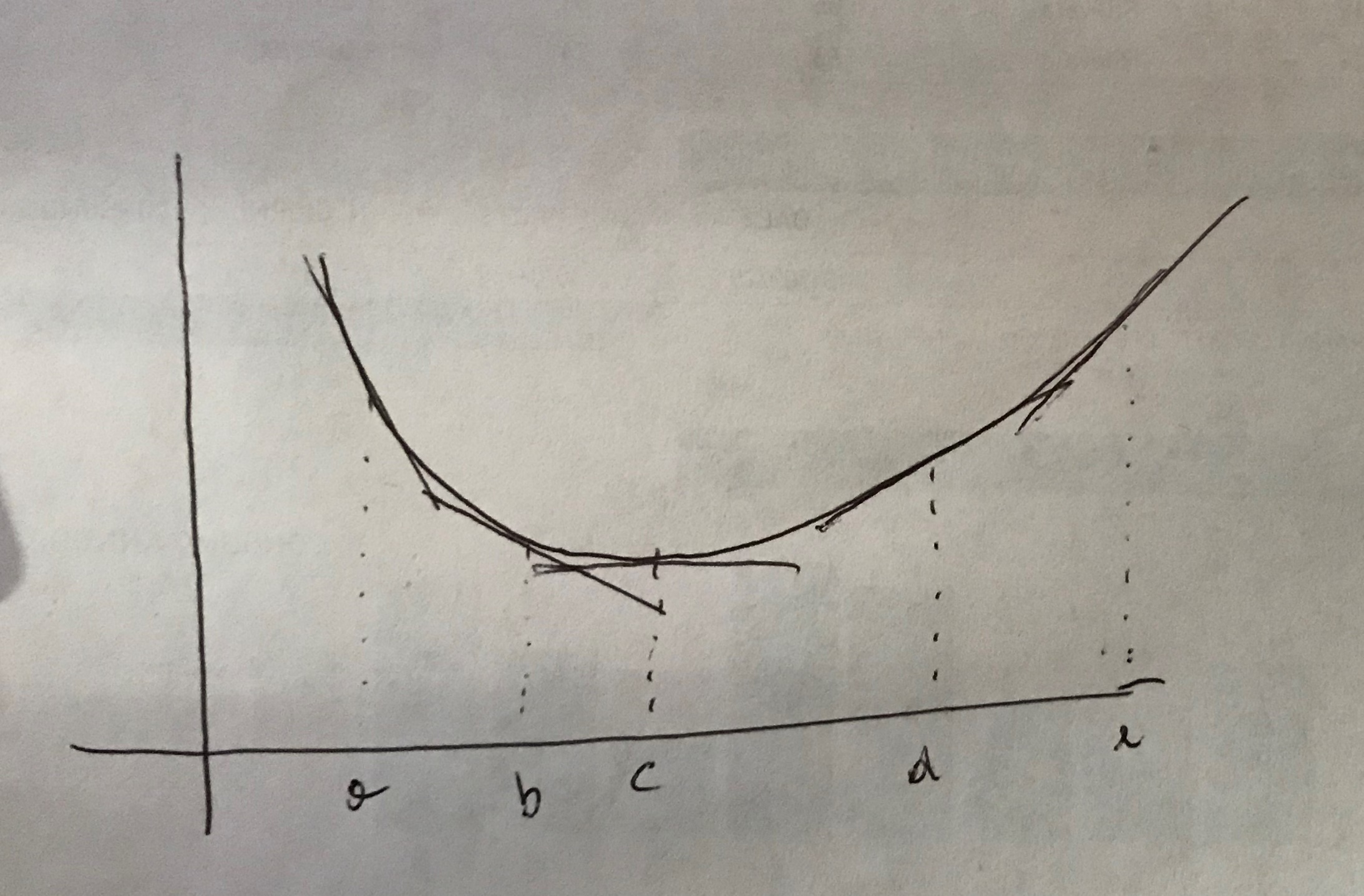
*f"*(*x*0) < 0 ⇒ *f'* decr. in *x*0 ⇒ *x*0 pto di concavità verso il basso

*f'*(*x*0) > 0 ⇒ *f* crescente in *x*0

*f'*(*x*0) < 0 ⇒ *f* decrescente in *x*0

*f'*(*x*0) = 0, *f"*(*x*0) > 0 *x*0 è di min perché *f* a tangente orizz. e concava verso l'alto

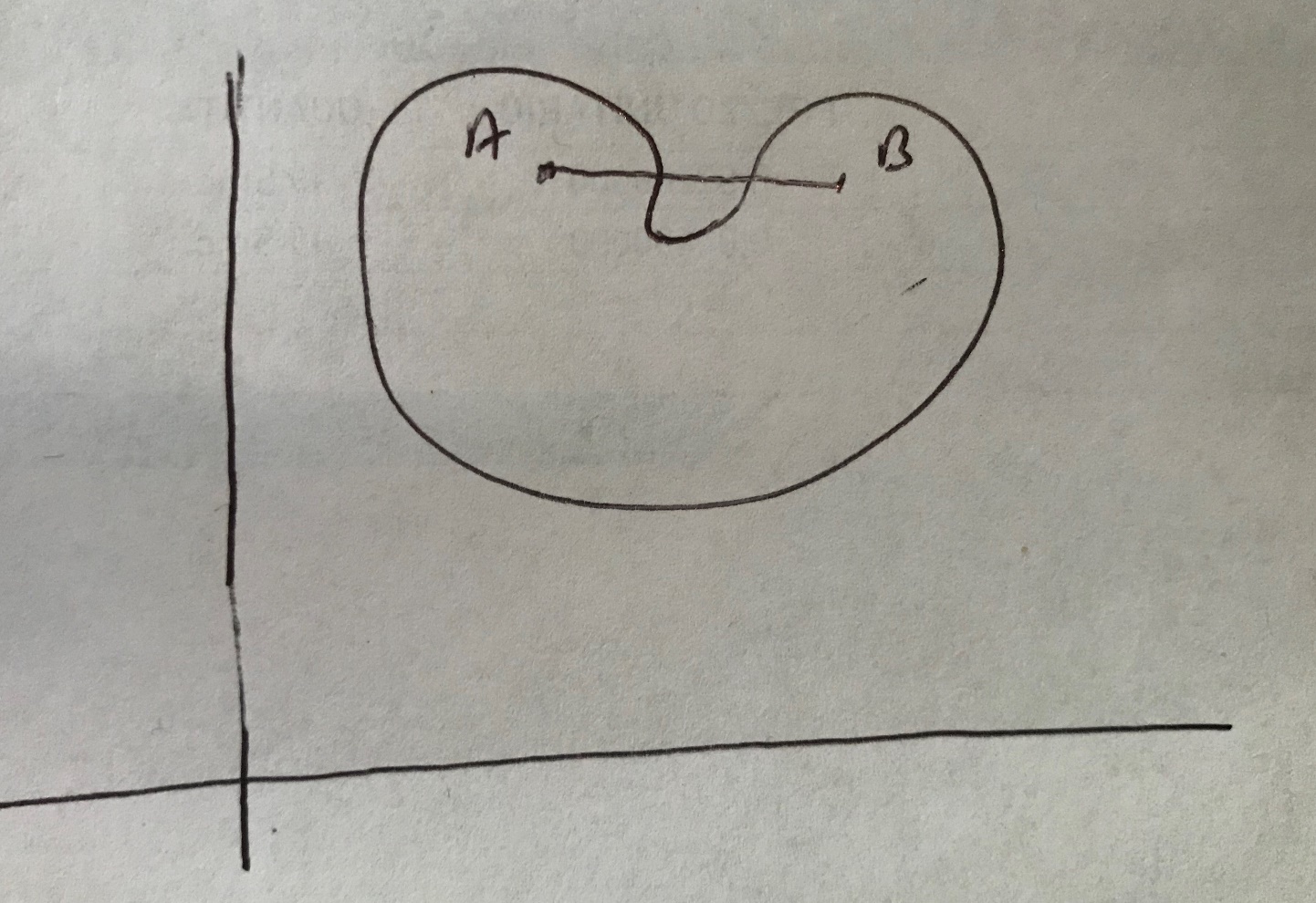
*f'*(*x*0) = 0, *f"*(*x*0) < 0 *x*0 è di max



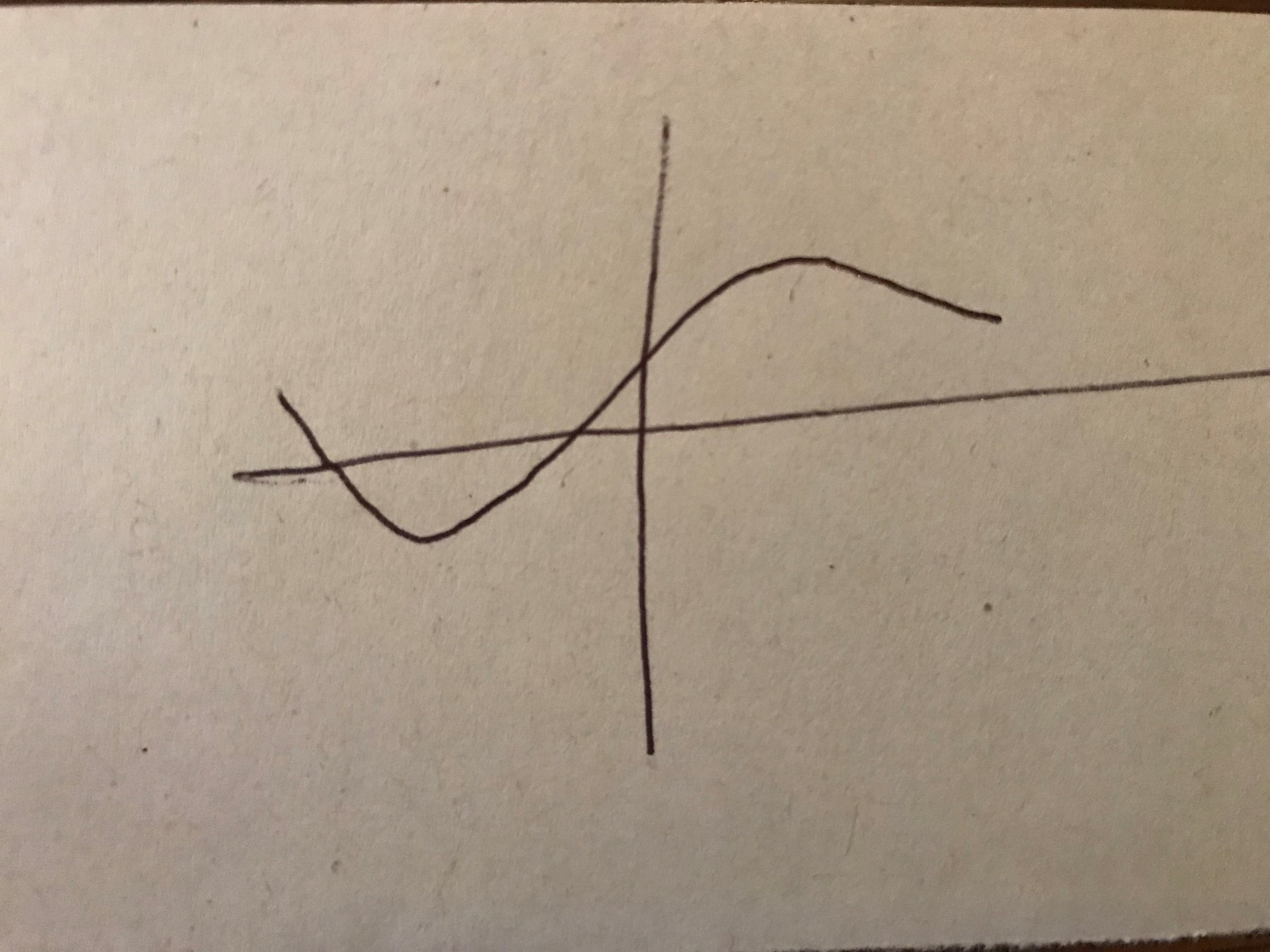
convessità verso il basso (verso l'alto):

in un intorno del pto di tangenza, la curva sta tutta sopra (sotto) la retta tangente

[ma anche: una funzione è convessa se è tale il suo "epigrafico" (= regione al di sopra del suo grafico; una regione è convessa se contiene tutto il segmento che congiunge due suoi pti qualunque). Si tratta quindi di una "convessità verso il basso", intesa globalmente]



att.ne: i tre caratteri segno/andamento/verso della concavità possono assortirsi in un modo qualunque:



un pto di estremo (interno al dominio) è un pto in cui la curva cambia andamento;

ossia *f'* cambia segno: per il che, è necessario (ma non sufficiente!) che si annulli

*x*0 pto di estremo (max o min relativo) ⇒ *f'*(*x*0) = 0 ma non vale il viceversa

CN per *x*0 di estremo: *f'*(*x*0) = 0

CNES per *x*0 di estremo: *f'*(*x*0) = 0, in *x*0 *f'*(*x*0) cambia segno

CS per *x*0 di estremo: *f'*(*x*0) = 0, *f"*(*x*0) ≠ 0

pto di flesso: pto in cui la curva cambia verso della concavità (siamo ovviamente all' interno del dominio); ossia *f"* cambia segno: per il che, è necessario (ma non sufficiente!) che si annulli

*x*0 flex ⇒ *f"*(*x*0) = 0 ma non vale il viceversa

CN per *x*0 di flex: *f"*(*x*0) = 0

CNES per *x*0 flex: *f"*(*x*0) = 0, in *x*0 *f"*(*x*0) cambia segno

CS per *x*0 flex: *f"*(*x*0) = 0, *f'"*(*x*0) ≠ 0